

科学版

研究生教学丛书

应用泛函分析

姚泽清 苏晓冰 郑 琴 王在华 编著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-2893.0101)

高等教育出版中心·数理出版分社
联系电话：010-64034725
E-mail:mph@mail.sciencep.com

ISBN 978-7-03-019848-8



定 价：20.00 元

科学版研究生教学丛书

应用泛函分析

姚泽清　苏晓冰　郑　琴　王在华　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是为工学研究生“应用泛函分析”课程而编写的教材，全书共分六章，分别介绍实分析基础、距离空间、赋范空间与 Banach 空间、内积空间与 Hilbert 空间、有界线性算子的基本理论、有界线性算子的谱分析等内容. 全书概念简洁，内容紧凑，在强调泛函分析方法的概括性与应用的普适性的同时，突出数学思维方式的训练和数学素养的培养，恢复数学自然、生动、充满活力的本来面目. 书中每节末都附有难易适中的习题，并在书末附有详尽的习题答案，以供科技工作者自学和教师参考使用.

本书的起点低，只需要读者具备高等数学和线性代数的基础知识，可作为工学研究生和应用数学、信息与计算科学、应用物理等专业的本科生的教学用书，也可供对泛函分析方法有兴趣的科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/姚泽清等编著. —北京：科学出版社，2007
(科学版研究生教学丛书)
ISBN 978-7-03-019848-8

Ⅰ.应…　Ⅱ.姚…　Ⅲ.泛函分析-高等学校-教材　Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 135117 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：张怡君
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 9 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2007 年 9 月第一次印刷　印张：15 1/4
印数：1—3 500　字数：289 000

定价：20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

泛函分析是从变分法、积分方程以及量子物理等的研究中发展起来的数学分支,形成于20世纪30年代.它综合运用函数论、几何学、代数学的观点和方法来研究无限维向量空间(如函数空间)上的泛函、算子及其极限理论,并不断地以其他众多学科所提供的素材来提取自己的研究对象,它在概率论、函数论、连续介质力学、量子物理、最优化理论、控制论和信号处理等学科中都有重要的应用,强有力地推动着其他关联学科的发展.今天,它的空间理论、算子理论和谱理论等已经渗透到不少工程技术性的学科中,成为近代分析的基础之一.

泛函分析是 Euclid① 空间上的微积分学和解析几何学的自然延伸,实际上在高等数学中我们已经接触到泛函的概念,只是没有挑明而已.例如,实连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分

$$J(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

就是一个泛函数,它的取值是实数,但它的变元却由实数变成了实函数.这种函数的函数是泛函分析最早研究的对象,并随着求形如

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的泛函的极值(即所谓变分法)而发展起来.

历史上最有名的泛函极值问题是 John Bernoulli② 在1696年提出的最速降线问题.1697年 John Bernoulli 的哥哥 James Bernoulli③ 给出了最速降线问题的解答.它的基本问题是这样的:设 O 和 P 是铅直平面 xOy 内的两个点,一质点在重力作用下从 O 点沿一曲线滑落到 P 点,假定无摩擦和其他阻力,曲线呈何形状时其滑落的时间最短(见图0-1)?

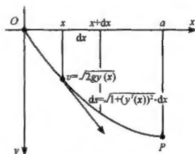


图0-1　最速降线问题

实际上,若设曲线方程为 $y=y(x)$,则总的下降时间为

---

① 欧几里得(约公元前330~前275年),古希腊数学家,欧几里得几何学的创始人.

② 约翰·伯努利(1667~1748年),瑞士数学家,变分法的创始人之一.

③ 詹姆士·伯努利(1654~1705年),瑞士数学家,变分法和概率论的创始人之一.

$$T(y)=\int_L \frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v}\mathrm{d}x,$$

再由能量守恒定律

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy,$$

$$v=\sqrt{2gy},$$

就有

$$T(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\mathrm{d}x,$$

此即为 y 的一个泛函. 可以证明, 当 y 为摆线(旋轮线)

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

时, $T(y)$ 取得极小值.

随着时间的推移,泛函分析的研究对象由泛函推广到一般的算子,研究范围也遍及分析学的方方面面,并随着线性算子的谱理论与量子力学中的谱分析惊人的一致而确定了自己的地位. 泛函分析成为独立的数学分支的两大标志是:1932 年出版的 Banach① 的《线性算子理论》和 von Neumann② 的《量子力学的数学基础》两部划时代著作.

尽管泛函分析有着浓厚的应用背景,但很多学生在学习过程中却感到其艰涩难懂,这是由于其高度的抽象性造成的. 实际上,以解方程为例,无论是线性方程还是非线性方程,显函数方程还是隐函数方程,常微分方程还是偏微分方程,在泛函分析中都被抽象为算子方程,而算子方程最终又被统一为方程

$$x=Tx,$$

从而使方程的求解问题转化为求算子 T 的不动点问题. 它在抽象过程中丧失了直观,而又在更高层次上恢复了直观,这正是泛函分析的奇妙之处.

泛函分析是一门既能充分体现现代数学思想和方法、体现数学的思维方式和思维过程,又具备较好应用价值的数学基础课程,它为解决物理和工程问题提供必要的数学框架. 为了全面提高工学研究生的数学素养,培养研究生的创新精神、创新思维和创新能力,使学生具备科学的认知能力、严谨的表达能力、熟练的建模能力,我们将泛函分析作为全体工学硕士研究生的公共基础课程,以保持高等教育中科学思维训练的连续性. 为了清晰地描述泛函分析的基本概念、基本理论和基本方法,同时又不增加学生的学习负担,我们按照预备知识、空间理论、算子理论、谱理

① 巴拿赫(1892～1945 年),波兰数学家,Banach 空间理论的创立者.

② 冯·诺伊曼(1903～1957 年),匈牙利数学家,算子代数、博弈论的创始人.

论的基本脉络，删繁就简，化难为易，编写了这部面向工学硕士研究生的《应用泛函分析》教材，也可供具备高等数学和线性代数基本知识的理科专业的本科学生使用. 本书的标准教学时数为 60 学时.

本书在成书过程中得到解放军理工大学训练部和理学院领导与专家的大力支持和帮助，并提出了许多中肯的意见，在此谨向他们表示诚挚的谢意！

由于时间和水平所限，书中错漏之处在所难免，恳请各位专家学者和读者批评指正. 信寄：yzqnj@yahoo.com.cn.

编 者

2007 年 3 月

于解放军理工大学应用数学与物理系

记　号

A^c	集 A 的补
A°	集 A 的内部
A'	集 A 的导集
$\overline{A}$	集 A 的闭包
$A^\perp$	集 A 的正交补
$\mathbf{A}^\mathrm{T}$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置
$\lvert A\rvert$	集 A 的基数
$A\cup B$	集 A 与 B 的并
$A\cap B$	集 A 与 B 的交
$A\setminus B$	集 A 与 B 的差
$A\times B$	集 A 与 B 的直积
$A\oplus B$	集 A 与 B 的直和
$B(X)$	从 X 到 X 的有界线性算子空间
$B(X,Y)$	从 X 到 Y 的有界线性算子空间
$B(\Omega)$	Ω 上的有界函数全体
$B_r(x_0)$	以 x_0 为中心以 r 为半径的开球
$\overline{B}_r(x_0)$	以 x_0 为中心以 r 为半径的闭球
c	连续统基数 $\lvert\mathbf{R}\rvert$；收敛数列空间
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{C}^n$	复 n 维 Euclid 空间
$C([a,b])$	$[a,b]$上的连续函数全体
$C^k([a,b])$	$[a,b]$上的 k 次连续可导的函数全体
$C(X)$	从 X 到 X 的紧算子的全体
$C(X,Y)$	从 X 到 Y 的紧算子的全体
c_0	收敛于 0 的数列空间
$d(A,B)$	集 A 与 B 之间的距离
$d(x,A)$	点 x 到集 A 的距离
$d(x,y)$	点 x 与 y 之间的距离
$\mathrm{diam}(A)$	集 A 的直径
$\dim X$	空间 X 的维数

$f(A)$	集 A 在映射 f 下的像集
f^{-1}	映射 f 的逆映射
$f^{-1}(B)$	集 B 在映射 f 下的原像集
f^{+}	f 的正部
f^{-}	f 的负部
$f_n \rightrightarrows f$	函数列$\{f_n\}$一致收敛于 f
$f_n \xrightarrow{w^*} f$	泛函列$\{f_n\}$弱*收敛于 x
$G(T)$	算子 T 的像
$g \circ f$	映射 f 与 g 的复合映射
I	指标集;恒等映射;单位算子
$\inf A$	实数集 A 的下确界
$\mathbf{K}$	数域($\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)
$\mathbf{K}^n$	n 维 Euclid 空间
$\mathbf{K}^{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵的全体
$\ker(T)$	算子 T 的核(零空间)
l^p	p 次幂可和数列空间($1\leqslant p<\infty$)
$L^p([a,b])$	$[a,b]$上的 p 次幂可积函数空间($1\leqslant p<\infty$)
l^∞	有界数列空间
$L^\infty(E)$	E 上几乎处处有界可测函数空间
$m(E)$	集 E 的测度
$m^*(E)$	集 E 的外测度
$\max A$	实数集 A 的最大值
$\min A$	实数集 A 的最小值
$\mathbf{N}$	自然数集(不包括数 0)
$N(T)$	算子 T 的零空间(核)
$P_M x$	点 x 在空间 M 上的投影
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{R}^n$	实 n 维 Euclid 空间
$\mathbf{R}^\infty$	数列空间
$R(T)$	算子 T 的值域
R_λ	算子 T 的预解式$(T-\lambda I)^{-1}$
$r_\sigma(T)$	算子 T 的谱半径
S	单位球面

$\mathrm{span}A$	集 A 张成的子空间
$\sup A$	实数集 A 的上确界
T_λ	$T-\lambda I$
T^*	算子 T 的对偶算子
$T_n \xrightarrow{s} T$	算子列 $\{T_n\}$ 强收敛于 T
$T_n \xrightarrow{w} T$	算子列 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T
X	基本集;空间
X^*	空间 X 的对偶空间
X^{**}	空间 X 的二次对偶空间
$x_n \xrightarrow{w} x$	点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x
$\bar{z}$	数 z 的共轭复数
$\rho(T)$	算子 T 的正则集
$\sigma(T)$	算子 T 的谱
$\sigma_c(T)$	算子 T 的连续谱
$\sigma_p(A)$	算子 T 的点谱
$\sigma_r(T)$	算子 T 的剩余谱
∂A	集 A 的边界
$\aleph_0$	可数基数 $\|\mathbf{N}\|$
$\forall$	任给
$\exists$	存在
s. t.	使得
$\Leftrightarrow$	当且仅当
$\perp$	正交
$\\|\cdot\\|$	范数
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	内积

目 录

第1章 实分析基础

作为实变量的分析学,实分析是微积分学的进一步发展,是泛函分析的基础.本章作为全书的预备知识,主要介绍一些集合论、实数理论、测度论和积分论方面的基本知识,以方便读者把握泛函分析的发展脉络,为下面进一步研究抽象空间及其之间的映射提供必要的数学语言和工具.

1.1 集 合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念.把现实世界和抽象思维中我们感兴趣的一些对象作为一个整体来研究,这个整体就称为一个**集合**,简称**集**;构成集合的每个对象就称为该集合的**元素**,简称**元**.

例如,所有实数构成一个集合 $\mathbf{R}$,它的元素是实数;区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数的全体构成一个集合 $C([a,b])$,它的元素是 $[a,b]$ 上的连续函数.

通常,集合用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示,集合的元素用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示.若集合 A 是由一切具有性质 P 的元素构成时,可表示为

$$A=\{x;x \text{ 具有性质 } P\}.$$

当 a 是集合 A 的元素时,称 a 属于 A,记作 $a\in A$;当 a 不属于 A 时,记作 $a\notin A$.

若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A);若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

含有有限个元素的集合称为**有限集**;含有无限个元素的集合称为**无限集**.不含任何元素的集合称为**空集**,通常用符号 $\varnothing$ 来表示.

集合 A 称为集合 B 的一个**真子集**,若 $A\subset B, A\neq B, A\neq\varnothing$;集合 A 与集合 B 称为**不相交**,若 $A\cap B=\varnothing$.

注 在集合概念中,需要注意以下几点:

1° 集合中的元素是明确的,一个元素要么属于这个集合,要么不属于这个集合;

2° 集合中的元素是不重复的;

3° 集合中的元素排列不分先后,例如

$$\{2,3,1\}=\{1,2,3\};$$

4° $A\subset B$ 并不意味着 A 为 B 的真子集，它包含着 $A=B$ 的情形；

5° 空集 $\varnothing$ 被看作是任一集合的子集，故一个含有 n 个元素的有限集的子集个数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

2. 集合的运算

(1) *并交运算*

定义 1.1.1　设 A 与 B 是两个集合，由 A 与 B 的全部元素构成的集合称为 A 与 B 的**并集**，简称 A 与 B 的**并**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由 A 与 B 的公共元素构成的集合称为 A 与 B 的**交集**，简称 A 与 B 的**交**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

集合的并、交运算可以推广到任意多个集合（有限或无限）的情形. 设 $\{A_\alpha: \alpha\in I\}$ 是一个集族，其中 I 是某个指标集，则这族集合的并定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x: \exists\alpha\in I, x\in A_\alpha\},$$

交定义为

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x: \forall\alpha\in I, x\in A_\alpha\},$$

式中，“$\exists$”表示“存在”；“$\forall$”表示“任给”.

集合的并交运算具有下列性质：

1° 交换律

$$A\cup B=B\cup A,$$
$$A\cap B=B\cap A;$$

2° 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

3° 分配律

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),$$
$$A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha);$$

4° 吸收律

$$A\cup(A\cap B)=A,$$
$$A\cap(A\cup B)=A.$$

(2) 差补运算

定义 1.1.2 设 A 与 B 是两个集合，由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的**差集**，简称 A 与 B 的**差**，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\notin B\};$$

当 X 为基本集时(即问题中所涉及的一切集合 $A,B,\cdots$ 都是 X 的子集)，称 $X\backslash A$ 为 A 的**补集**(或**余集**)，记作 A^c，即

$$A^c=\{x: x\in X \text{ 且 } x\notin A\}.$$

集合的差补运算具有下列性质：

1° $A\backslash B=A\cap B^c$； (1.1.1)

2° $A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing$； (1.1.2)

3° $X^c=\varnothing, \varnothing^c=X, (A^c)^c=A$； (1.1.3)

4° 对偶原理(De Morgan[①] 律)：

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c, \qquad \left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c. \tag{1.1.4}$$

注 要证明集合等式 $A=B$，其标准程式是：分别证

$$A\subset B, \qquad B\subset A,$$

最后得结论. 下面以式(1.1.1)的证明为例来加以说明.

$\forall x\in A\backslash B$，有 $x\in A$ 且 $x\notin B$，即 $x\in A$ 且 $x\in B^c$，从而有 $x\in A\cap B^c$，故

$$A\backslash B\subset A\cap B^c;$$

$\forall x\in A\cap B^c$，有 $x\in A$ 且 $x\in B^c$，即 $x\in A$ 且 $x\notin B$，从而有 $x\in A\backslash B$，故

$$A\cap B^c\subset A\backslash B.$$

合之，得

$$A\backslash B=A\cap B^c.$$

若启用命题的等价符号"$\Leftrightarrow$"，则上述证明过程可以简化为：

$$\begin{aligned} x\in A\backslash B &\Leftrightarrow x\in A, x\notin B \\ &\Leftrightarrow x\in A, x\in B^c \\ &\Leftrightarrow x\in A\cap B^c. \end{aligned}$$

(3) 直积运算

定义 1.1.3 设 A 与 B 是两个非空集合，则称集合

$$\{(x,y): x\in A, y\in B\}$$

为 A 与 B 的**直积集**，记作 $A\times B$.

注 $A\times B$ 中的元素是一个有序对，即

① 德·摩根(1806～1871年)，英国数学家，逻辑代数的创始人之一.

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \iff x_1=x_2,y_1=y_2,$$

故直积无交换律,即在一般情况下,有

$$A\times B\neq B\times A.$$

实际上,我们所熟知的二维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^2$ 就是实数集 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 的直积.

直积的概念可推广到任意多个集合上去. 对有限个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1\times A_2\times\cdots\times A_n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_k\in A_k, k=1,2,\cdots,n\},$$

对集列 $\{A_n\}$,有

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_k = \{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots): x_k\in A_k, k=1,2,\cdots\}.$$

习 题 1.1

1. 证明分配律:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

2. 证明 De Morgan 律:

$$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,\qquad (\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c.$$

3. 证明等式

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2).$$

4. 证明等价关系

$$A\times B=B\times A \iff A=B.$$

1.2 映 射

1. 集合间的映射

在高等数学中我们已熟悉了函数的概念,若将其定义域和值域的范围由实数集换成一般的集合,就得到映射的概念.

定义 1.2.1 设 X,Y 是两个非空集合,若 $\forall x\in X$,按照某一法则 f,在 Y 中有唯一的 y 与之对应,则称 f 是 X 到 Y 的**映射**,记作 $f:X\to Y$;y 称为 x 在映射 f 下的**像**,记作 $f(x)$;X 称为 f 的**定义域**,并称

$$f(X)=\{f(x):x\in X\}$$

为 f 的**值域**.

映射又称为**算子**,并根据集合 X 与 Y 的不同情形,在不同的数学分支中有不同的惯用名称. 例如,当 $Y=X$ 时,f 可称为 X 上的**变换**;当 Y 是数集(实数集 $\mathbf{R}$ 或复数集 $\mathbf{C}$)时,f 可称为定义在 X 上的**泛函**.

例 1.2.1 若 $f:X\to X$ 满足

$$f(x)=x,$$

则 f 是 X 到自身的一个映射,称为 X 上的**恒等映射**,记为 I_X.

注 在不引起混淆时,也可以简记为 I.

例 1.2.2 设 $C([a,b])$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数的全体所构成的集合,则 $\forall x\in C([a,b])$, $x=x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$$

就是 $C([a,b])$ 上的一个泛函. 尽管它的取值仍是实数,但与以往的函数概念不同的是,它的变元是函数而不是数,这是我们在学习泛函分析时要逐步加以适应的.

(1) 满射与单射

定义 1.2.2 对映射 $f:X\to Y$,若 f 的值域

$$f(X)=Y,$$

则称 f 为 X 到 Y 上的**满射**;若 $\forall x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$,有

$$f(x_1)\neq f(x_2),$$

则称 f 为 X 到 Y 的**单射**. 若 f 既是单射又是满射,则称 f 为 X 到 Y 上的**双射**(或一一对应、一一映射).

例 1.2.3 设 $C^1([a,b])$ 为区间 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数的函数所构成的集合,定义映射 $f:C([a,b])\to C^1([a,b])$ 为

$$f(x)=[f(x)](t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s,\quad \forall x\in C([a,b]),$$

则 f 是单射而不是满射.

证 $\forall x_1,x_2\in C([a,b])$,若有 $f(x_1)=f(x_2)$,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\int_a^t [x_1(s)-x_2(s)]\mathrm{d}s=0,$$

等式两边同时对 t 求导,得

$$x_1(t)-x_2(t)=0,$$

从而有 $x_1=x_2$,故 f 是单射.

对于 $1\in C^1([a,b])$,若 f 是满射,则 $\exists x\in C([a,b])$,使得

$$\int_a^t x(s)\mathrm{d}s=1,$$

等式两边同时对 t 求导,得 $x(t)=0$,但这是不可能的,否则上述积分应为 0,故 f 不是满射.

注 f 是否为单射与满射,与 X 与 Y 的选取有很大关系. 例如,函数 $y=x^2$ 是 $(-\infty,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 的满射,是 $(0,\infty)$ 到 $(-\infty,\infty)$ 的单射,是 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 的双

射，而当把它看作为$(-\infty,\infty)$到$(-\infty,\infty)$的映射时则什么都不是.

(2) 像集与原像集

定义 1.2.3　对映射 $f:X\to Y$，若 $A\subset X$，$B\subset Y$，则集合

$$f(A)=\{f(x):x\in A\}$$

称为 A 在 f 下的像集，集合

$$f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\}$$

称为 B 在 f 下的原像集.

原像集具有下列性质.

定理 1.2.1　原像集 $f^{-1}(B)$ 保留集合的所有运算性质：

1° $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；　(1.2.1)

2° $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；　(1.2.2)

3° $f^{-1}(B_1\backslash B_2)=f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2)$；　(1.2.3)

4° $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$.　(1.2.4)

证　仅证式(1.2.3)、式(1.2.4). $\forall B_1,B_2\subset Y$，由于

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(B_1\backslash B_2)&\Leftrightarrow f(x)\in B_1\backslash B_2\\&\Leftrightarrow f(x)\in B_1,f(x)\notin B_2\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1),x\notin f^{-1}(B_2)\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2),\end{aligned}$$

故式(1.2.3)成立；至于式(1.2.4)，在式(1.2.3)中令

$$B_1=Y,\qquad B_2=B,$$

并注意到

$$f^{-1}(Y)=X$$

即得. 证毕.

像集具有下列性质.

定理 1.2.2　像集 $f(A)$ 仅保留集合的并运算性质，而交、差、余运算性质仅当 f 是单射时才成立：

1° $f(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$；　(1.2.5)

2° $f(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$；　(1.2.6)

3° $f(A_1\backslash A_2)\supset f(A_1)\backslash f(A_2)$；　(1.2.7)

4° $f(A^c)\supset[f(A)]^c$.　(1.2.8)

证　仅证式(1.2.7). $\forall A_1,A_2\subset X$，

① 若 $f(A_1)\backslash f(A_2)=\varnothing$，则包含关系显然成立；

② 若 $f(A_1)\backslash f(A_2)\neq\varnothing$，则 $\forall y\in f(A_1)\backslash f(A_2)$，$\exists x\in A_1$，使得 $y=f(x)$. 此时，

$$\begin{aligned} y \in f(A_1)\backslash f(A_2) &\Leftrightarrow y \in f(A_1), y \notin f(A_2) \\ &\Rightarrow x \in A_1, x \notin A_2 \\ &\Leftrightarrow x \in A_1\backslash A_2 \\ &\Rightarrow y \in f(A_1\backslash A_2), \end{aligned}$$

故

$$f(A_1\backslash A_2) \supset f(A_1)\backslash f(A_2),$$

其中蕴涵符号“$\Rightarrow$”表示由前者可以推出后者. 若要将其换成等价符号“$\Leftrightarrow$”,必须有 f 为单射的条件,故当 f 是单射时,等号成立. 证毕.

注 对于原像集 $f^{-1}(B)$,式中的 f^{-1} 仅是一个符号,并不代表映射 f 存在某种形式的逆,故我们所熟知的一些有关逆的性质并不存在.

例如,我们只有包含关系

$$f^{-1}(f(A)) \supset A, \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B,$$

而前者仅当 f 为单射时等号成立;后者仅当 f 为满射时等号成立.

(3) 延拓与限制

定义 1.2.4 对映射 $f: A \to Y, F: B \to Y$,若 $A \subset B$,且 $\forall x \in A$,有

$$F(x) = f(x),$$

则称 F 是 f 在 B 上的一个**延拓**,f 是 F 在 A 上的**限制**.

2. 复合映射与逆映射

(1) 复合映射

定义 1.2.5 对映射 $f: X \to Y, g: Y \to Z$,由

$$h(x) = g[f(x)]$$

所确定的映射 $h: X \to Z$ 称为 f 与 g 的**复合映射**,记作 $g \circ f$.

定理 1.2.3 $\forall E \subset Z$,有

$$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)).$$

证 $\forall x \in (g \circ f)^{-1}(E)$,有

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(E) &\Leftrightarrow g[f(x)] \in E \\ &\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(E) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(E)), \end{aligned}$$

故 $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E))$,证毕.

(2) 逆映射

定义 1.2.6 对映射 $f: X \to Y$,若存在 $g: Y \to X$,使得

$$g \circ f = I_X, \qquad f \circ g = I_Y,$$

则称 g 为 f 的逆映射，记作 f^{-1}.

定理 1.2.4　f 存在逆映射 $f^{-1}\Leftrightarrow f$ 是双射.

习　题　1.2

1. 证明等式

$$\{f\geqslant a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{f>a-\frac{1}{k}\right\}.$$

2. 证明等式

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B).$$

3. 证明包含关系

$$f^{-1}(f(A))\supset A,$$

并举例说明等号关系不一定成立.

4. 设映射 $f:X\to Y, g:Y\to X$ 满足

$$g\circ f=I_X,$$

证明：f 是单射，g 是满射.

1.3　集合的基数

1. 基数的概念

对于有限集，人们可以通过计算其所含元素的个数来比较其大小，但对于无限集，由于所含的元素都是无穷多个，又该如何比较其大小？远在 Aristotle[①] 时代，人们就认为所有无限集都一样大，这一观点在历史上曾延续了两千年之久. 1638 年，Galileo[②] 将自然数集

$$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

与自然数的平方数集 $S=\{1^2,2^2,\cdots,n^2,\cdots\}$ 相比较时惊奇地发现，两者之间可以通过映射 $f:\mathbf{N}\to S$，

$$f(n)=n^2$$

建立起一一对应，而这与"整体大于部分"的传统观念相悖，Galileo 认为此结果是不可理喻的，这就是历史上著名的"Galileo 困惑".

到了 19 世纪，Cantor[③] 在创立集合论的过程中，以一一对应为原则，提出了集合等价的概念，并引入基数的概念来比较无限集的大小，还明确规定如果一个集合可以和它的一个真子集建立起一一对应，则这个集合是无限集，从而把"整体大于

① 亚里士多德(公元前 384～前 322 年)，古希腊哲学家、数学家，形式逻辑的奠基人.

② 伽利略(1564～1642 年)，意大利天文学家、物理学家，近代科学方法论的奠基人.

③ 康托尔(1845～1918 年)，德国数学家，集合论的创始人.

部分”的原则限制在有限集上，彻底解决了无穷悖论.

(1) 集合的对等

定义 1.3.1 若集合 A,B 之间存在一一对应，则称 A 与 B **对等**，记作 $A\sim B$.

例 1.3.1 区间(0,1)与实数集 $\mathbf{R}$ 对等.

证 令

$$f(x)=\tan\pi\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

则 $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ 是一个一一对应，故(0,1)与 $\mathbf{R}$ 对等.

集合的对等是一种等价关系，它满足

1° 自反性：$A\sim A$；

2° 对称性：$A\sim B\Rightarrow B\sim A$；

3° 传递性：$A\sim B,B\sim C\Rightarrow A\sim C$.

注 在数学上，把满足自反性、对称性、传递性的关系都称为**等价关系**. 例如，三角形的相似、向量的平行、矩阵的合同等，这种关系广泛地存在于一般科学乃至日常生活中，我们在以后的学习中还会不断地遇到.

(2) 集合的基数

定义 1.3.2 若 $A\sim B$，则称 A 与 B 具有相同的**基数**.

集 A 的基数可记作 $|A|$，它并不是一个数，而是为对等的集合赋予的一个记号，它代表了这些对等集合的共性. 对等思想的本质就是将集合按对等关系进行分类，而基数就代表了该等价类所处的“数量级”，是广义的元素个数.

基数可以进行大小的比较，若集合 A 与 B 的一个子集对等而不与 B 本身对等，则称 A 的基数小于 B 的基数，记作 $|A|<|B|$.

类似于高等数学中的夹逼定理，我们有：

定理 1.3.1 若 $A\subset B\subset C$，且 $|A|=|C|$，则

$$|B|=|C|.$$

由于有限集对等的充分必要条件是它们的元素个数相等，故有限集的基数就是它的元素个数；由于空集不含有任何元素，故规定

$$|\varnothing|=0.$$

至于无限集，我们将自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数称为**可数基数**，记作

$$|\mathbf{N}|=\aleph_0$$

(希伯莱字母，读作阿列夫零)，将实数集 $\mathbf{R}$ 的基数称为**连续统基数**，记作

$$|\mathbf{R}|=c.$$

后面我们会看到，$\aleph_0<c$.

2. 可数集

定义 1.3.3　与自然数集 N 对等的集合称为**可数集**. 若 A 为有限集或可数集,则称 A 为**至多可数集**.

由定义可知,若 A 可数,则 A 与自然数集 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 对等,故 A 是可数集的充分必要条件是 A 中的元素可按自然数编号排列成下列形式:

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

可数集具有以下基本性质.

定理 1.3.2　任一无限集都包含可数子集.

证　设 A 为无限集,显然 $A\neq\varnothing$,故 $\exists a_1\in A$. 又

$$A\setminus\{a_1\}\neq\varnothing,$$

故又 $\exists a_2\in A\setminus\{a_1\}$. 设已从 A 中取出 k 个互异的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_k$,因为 A 中有无穷多个元素,所以

$$A\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\neq\varnothing,$$

于是 $\exists a_{k+1}\in A\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$. 由归纳法,就得到 A 的一个可数子集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,证毕.

上述定理表明,在无限集的基数中,可数集的基数是最小的,故可数集是最小的无限集.

定理 1.3.3　有限个或可数个可数集的并仍是可数集.

证　设有有限个可数集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,其中

$$A_k=\{a_{k1},a_{k2},\cdots\},$$

不妨设它们互不相交,则只要抽取它们的第 1 个元素、第 2 个元素依次列出:

$$a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2},a_{13},a_{23},\cdots,a_{n3},\cdots$$

即可看出它们的并仍是可数集.

至于可数个可数集 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,将它们的一切元素排成下列形式:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

则从左上角起可按箭头次序将 $A_1,A_2,\cdots$ 的所有元素逐一列出:

$$a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},a_{14},a_{23},a_{32},a_{41},\cdots,$$

故$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$可数. 证毕.

定理 1.3.4 有限个可数集的直积是可数集.

证 设有两个可数集

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\},\quad B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots\},$$

则

$$A\times B=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_1,b_3),(a_2,b_2),(a_3,b_1),\cdots\},$$

其中(a_i,b_j)是按照$i+j$的大小从小到大依次排列出来的,故$A\times B$可数,定理当$n=2$时成立.

设当$n=k$时定理成立,即k个可数集$A_1,A_2,\cdots,A_k$的直积$A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$是可数集,则当$n=k+1$时,

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_k\times A_{k+1}=(A_1\times A_2\times\cdots\times A_k)\times A_{k+1}$$

是两个可数集的直积,因而也可数. 由数学归纳法,定理成立. 证毕.

注 可数个可数集的直积不是可数集. 即使A_n是有限集,那么

$$A=\prod_{k=1}^{\infty}A_k$$

也不一定可数. 例如,当

$$A_n=\{0,1\}$$

时,A中的元素$(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$可看作二进制小数

$$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其全体对应于[0,1]区间,而[0,1]区间是不可数的(这一点,由例 1.3.1 和定理 1.3.1、定理 1.3.5 保证).

例 1.3.2 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证 首先,[0,1)区间中的有理数是可数的. 实际上,[0,1)中的有理数可以唯一地表为既约分数

$$\frac{p}{q},\quad q>0,\quad 0\leqslant p<q,$$

故可将其按照q,p的大小从小到大依次排列出来:

$$0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots,$$

从而是可数的.

其次,$[n,n+1)$区间中的有理数与[0,1)区间中的有理数对等,故也是可数的,而

$$\mathbf{Q}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}[k,k+1)\cap\mathbf{Q}$$

是可数个可数集的并,由定理 1.3.3,知 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

例 1.3.3 有理系数多项式的全体是可数集.

证 设 P 为有理系数多项式的全体所构成的集合，

$$P_n=\{r_0x^n+r_1x^{n-1}+\cdots+r_n;r_k\in\mathbf{Q},k=0,1,\cdots,n\},$$

则 $P=\bigcup_{n=0}^{\infty}P_n$，故我们只需证 P_n 是可数集.

由于 $r_0x^n+r_1x^{n-1}+\cdots+r_n$ 可以与 $n+1$ 维有理坐标向量$(r_0,r_1,\cdots,r_n)$建立起一一对应的关系，故

$$P_n\sim\mathbf{Q}^{n+1},$$

故由定理 1.3.4，知 $\mathbf{Q}^{n+1}$是可数的，从而 P_n 也是可数的.

例 1.3.4 直线上的互不相交的区间集至多可数.

证 在每个区间上取一个有理数与之对应，由于各区间互不相交，故不同的区间对应于不同的有理数，故整个区间集与 $\mathbf{Q}$ 的一个子集对等，从而是一个至多可数集.

3. 不可数集

不是可数集的无限集，称为**不可数集**.

定理 1.3.5 实数集是不可数集.

证 先用反证法证区间(0,1)是不可数集. 设(0,1)中的点是可数的，则

$$(0,1)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\},$$

其中

$$x_n=0.x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots.$$

取 $a=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，其中

$$a_n=\begin{cases}2, & 若\ x_{nn}=1,\\ 1, & 若\ x_{nn}\neq 1,\end{cases}$$

则 a 与任一 x_n 都不同，这与 $a\in(0,1)$矛盾，故(0,1)是不可数集.

最后，由例 1.3.1，知 $\mathbf{R}$ 与(0,1)区间对等，故 $\mathbf{R}$ 是不可数集. 证毕.

推论 $\aleph_0<c$.

证 因为 $\mathbf{N}\subset\mathbf{R}$，所以$\aleph_0\leqslant c$；若$\aleph_0=c$，则实数集 $\mathbf{R}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等，这与 $\mathbf{R}$ 不可数矛盾，故$\aleph_0<c$. 证毕.

基数与实数集同为 c 的集合还有：

① 无理数集；

② 实系数代数多项式的全体；

③ 直线上的所有区间；

④ $[a,b]$上的连续函数全体；

⑤ n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$.

实际上,当 1877 年 Cantor 发现 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}$ 之间可以建立一一对应关系的时候,他说道:"我看见了,但我不相信."因为这抹杀了空间的维数的区别,但事实就是如此.

余下的还有两个问题:

1° 是否存在大于 c 的基数?

回答是:存在. 由实数集 $\mathbf{R}$ 的所有子集所构成的集族 $P(\mathbf{R})$,其基数就大于 c,记作 2^c,称为**超连续统基数**.

2° 是否存在基数 b,使得 $\aleph_0<b<c$?

Cantor 猜测这样的 b 不存在,这就是著名的**连续统假设**(Hilbert[1]23 个数学问题中的第 1 个),记为 CH. 1938 年,Godel[2] 证明了 CH 与集合论的 ZF 公理系统的相容性,即在 ZF 下推不出 CH 是错的;1963 年,Cohen[3] 证明了两者的独立性,即在 ZF 下也推不出 CH 是对的,使连续统假设在 ZF 下成为一种既不能证明,又不能推翻的逻辑工具.

习 题 1.3

1. 证明:$\mathbf{R}^n$ 上的有理点集是可数集.
2. 证明:单调函数的间断点至多可数.
3. 证明:若 A 为无限集而 B 为可数集,则
$$A\cup B\sim A.$$
4. 证明:无理数集的基数为 c.

1.4 实数的性质

1. 确界存在定理

定义 1.4.1 设 A 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集,若 M 是 A 的最小上界,即

① $\forall a\in A$,有 $a\leqslant M$;

② 若 $\forall a\in A$,有 $a\leqslant C$,则 $M\leqslant C$,

则称 M 为 A 的**上确界**(supremum),记作 $M=\sup A$.

若 m 是 A 的最大下界,即

① $\forall a\in A$,有 $a\geqslant m$;

② 若 $\forall a\in A$,有 $a\geqslant d$,则 $m\geqslant d$,

则称 m 为 A 的**下确界**(infimum),记作 $m=\inf A$.

---

① 希尔伯特(1862～1943 年),德国数学家,元数学的创始人,形式主义学派的代表人物.

② 哥德尔(1906～1978 年),奥地利数学家、逻辑学家.

③ 科恩(1934 年～),美国数学家.

若集合 A 的上确界属于 A，则称其为 A 的**最大值**(maximum value)，记作 $\max A$；若集合 A 的下确界属于 A，则称其为 A 的**最小值**(minimum)，记作 $\min A$.

定理 1.4.1(确界存在定理)　对 $\mathbf{R}$ 的非空子集 A，若 A 有上界，则必有上确界；若 A 有下界，则必有下确界.

注　若在有理数集 $\mathbf{Q}$ 的范围内考虑问题，则确界存在定理不成立. 例如，对数列

$$A=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\},$$

由高等数学的知识我们知道 A 有上界 3，且当 $n\to\infty$ 时单调增加趋向于 e，故在实数范围内 A 有上确界 e，但在有理数范围内，A 却没有上确界，因为 e 是一个无理数.

2. 单调有界定理

有了上、下确界的概念，在高等数学中我们已熟知的单调有界定理可以描述如下：

定理 1.4.2(单调有界定理)　实数集上的单调有界数列 $\{x_n\}$ 必有极限，且

1° 当 $\{x_n\}$ 单调增加有上界时，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n\};$$

2° 当 $\{x_n\}$ 单调减少有下界时，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\inf\{x_n\}.$$

3. 区间套定理

定义 1.4.2　闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 称为一个**闭区间套**，若

$$[a_k,b_k]\supset[a_{k+1},b_{k+1}]\quad(k=1,2,\cdots),$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

定理 1.4.3(区间套定理)　设 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个闭区间套，则存在唯一的一点 $\xi\in\mathbf{R}$，使得

$$\xi\in\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k].$$

注　对开区间套，结论不成立. 例如，$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}$ 是一个开区间套，但

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{k}\right)=\varnothing.$$

4. 完备性定理

在极限理论中，要说明数列 $\{x_n\}$ 有极限，需要表达 5 层意思：

$$\exists a\in\mathbf{R},\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbf{N},\quad \forall n>N,\quad |x_n-a|<\varepsilon.\qquad(1.4.1)$$

现在的问题是:在一般情况下,我们并不知道 a 是什么,我们希望能够通过 $\{x_n\}$ 自身与自身的比较来得出它是否收敛的结论.

实际上,对收敛数列,只要将式(1.4.1)中最后一个 ε 改写为 $\varepsilon/2$(由 ε 的任意性,这样做是合法的),则当 $m,n>N$ 时,就有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=|x_m-a+a-x_n|\\&\leqslant|x_m-a|+|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

这样 x_n 与未知极限 a 的比较就转化为 x_n 与 x_m 的比较,而无需事先知道极限的值.

定义 1.4.3 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$,使当 $m,n>N$ 时,有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为 **Cauchy**[①] **列**(或**基本列**).

上面已经指出,任一收敛点列都是 Cauchy 列. 余下的问题是,这样的数列是否收敛. 对于实数集,回答是肯定的.

定理 1.4.4(Cauchy 收敛准则) $\mathbf{R}$ 中的任一 Cauchy 列都收敛到一实数.

实数集的这一特性,称为 **R 的完备性**.

注 有理数集没有完备性. 例如,有理数列

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

作为实数列是一个 Cauchy 列,有极限 e,但在有理数范围内却没有极限,因为 $e\notin\mathbf{Q}$.

5. 列紧性定理

定理 1.4.5(列紧性定理) 有界实数列必有收敛子数列.

例如,数列

$$x_n=(-1)^n$$

是一个有界数列:$|(-1)^n|\leqslant1$,它本身并不收敛,但它有两个收敛子数列

$$\{x_{2k}\}:1,1,\cdots,1,\cdots;$$

$$\{x_{2k-1}\}:-1,-1,\cdots,-1,\cdots.$$

有界实数列的这一特性,称为**列紧性**.

6. 有限覆盖定理

定义 1.4.4 开区间族 $\{(a_\lambda,b_\lambda):\lambda\in I\}$ 称为闭区间 $[a,b]$ 的一个**开覆盖**,若

$$\bigcup_{\lambda\in I}(a_\lambda,b_\lambda)\supset[a,b].$$

---

① 柯西(1789~1857 年),法国数学家,现代分析学的奠基人之一.

若$\exists \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in I$,使得

$$\bigcup_{k=1}^{n}(a_{\lambda_k},b_{\lambda_k})\supset[a,b],$$

则称$(a_{\lambda_1},b_{\lambda_1}),(a_{\lambda_2},b_{\lambda_2}),\cdots,(a_{\lambda_n},b_{\lambda_n})$为$\{(a_\lambda,b_\lambda):\lambda\in I\}$的一个**有限子覆盖**.

定理 1.4.6(有限覆盖定理)　闭区间的任一开覆盖必有有限子覆盖.

注　将条件中的闭区间改为开区间,结论不成立.例如,由于

$$(a,b)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(a+\frac{1}{k},b-\frac{1}{k}\right),$$

故开区间列$\left\{\left(a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right)\right\}$是$(a,b)$的一个开覆盖,但却没有**有限子覆盖**.

以上我们介绍了实数系的8大基本定理中的6个,它们在实数范围内是等价的,可以相互推导.

习　题　1.4

1. 设$\{x_n\},\{y_n\}$为实数列,证明:

$$\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\},$$
$$\inf\{x_n+y_n\}\geqslant\inf\{x_n\}+\inf\{y_n\},$$

并举例说明等号不一定成立.

2. 设$\{x_n\}$单调增加且有上界,证明:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n\}.$$

3. 设a_n是π的精确到10^{-n}的不足近似值,

$$a_1=3.1,\quad a_2=3.14,\quad a_3=3.141,\quad\cdots$$

证明:$\{a_n\}$是Cauchy列.

4. 设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数,证明:$f(x)$在$[a,b]$上有界.

1.5　一致连续与一致收敛

1. 函数的一致连续性

在高等数学中,我们说函数f在区间E上连续,是说$f(x)$在E上任一点x_0处连续,用ε-δ语言来讲,就是$\forall x_0\in E$,对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,使得对$\forall x\in E$,只要$|x-x_0|<\delta$,就有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{1.5.1}$$

因此,函数的连续性概念是一个局部概念,描述的是f在E上各点的局部性态,找到的δ不仅与ε有关,还与E中的点x_0有关.

因此,我们需要引入更强的连续性概念——函数的一致连续性概念.

定义 1.5.1　设函数f在点集E上有定义,若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对$\forall x,x'\in E$,只要$|x-x'|<\delta$,就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon,$$

则称 f 在 E 上一致连续.

显然,一致连续的函数一定是连续函数. 为了突出一般性,我们在定义中将(1.5.1)中的点 x_0 换成了更为一般的记号 x'.

当 f 在 E 上一致连续时,找到的 δ 仅与 ε 有关,而与 E 中的点无关,故函数的一致连续性概念是一个整体概念,描述的是 f 在 E 上的整体性态. 现在的问题是,这样的 δ 是否存在? 下面我们来看一个例题.

例 1.5.1 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间(0,1)上连续但不一致连续.

证 $\forall x_0\in(0,1)$,对 $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon \iff \frac{x_0}{1+\varepsilon x_0}<x<\frac{x_0}{1-\varepsilon x_0}$$

$$\iff -\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}<x-x_0<\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0},$$

取

$$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0},\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}\right\}=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}>0,$$

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon, \tag{1.5.2}$$

故 $y=\frac{1}{x}$ 在(0,1)上连续.

由于在 x_0 处我们已经把 δ 取到了它的最大值,而

$$\lim_{x_0\to0+}\delta=\lim_{x_0\to0+}\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}=0,$$

故不存在与 x_0 无关的 $\delta>0$ 使得式(1.5.2)对所有的 $|x-x_0|<\delta$ 都成立,故函数不一致连续.

由上例知,开区间上的连续函数不一定一致连续,那么,闭区间上的连续函数是否一致连续呢? 回答是肯定的.

定理 1.5.1(一致连续定理) 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证 $\forall\varepsilon>0$, $\forall x_0\in[a,b]$,由 f 在 x_0 处的连续性,知 $\exists\delta(x_0)>0$,只要 $|x-x_0|<\delta(x_0)$,就有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

让 x_0 跑遍 $[a,b]$,则

$$\left\{\left(x_0-\frac{\delta(x_0)}{2},x_0+\frac{\delta(x_0)}{2}\right):x_0\in[a,b]\right\}$$

就是$[a,b]$的一个开覆盖，而由有限覆盖定理，它必有有限子覆盖

$$\left\{\left(x_k-\frac{\delta(x_k)}{2},x_k+\frac{\delta(x_k)}{2}\right),k=1,2,\cdots,n\right\}.$$

取$\delta=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\delta(x_k)}{2}\right\}$，则$\forall x,x'\in[a,b]$，$|x-x'|<\delta$，$\exists k,1\leqslant k\leqslant n$，使得

$$x'\in\left(x_k-\frac{\delta(x_k)}{2},x_k+\frac{\delta(x_k)}{2}\right),$$

再由$|x-x'|<\delta$，得

$$|x-x_k|\leqslant|x-x'|+|x'-x_k|<\delta+\frac{\delta(x_k)}{2}\leqslant\delta(x_k),$$

从而有$x,x'\in(x_k-\delta(x_k),x_k+\delta(x_k))$，此时必有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x')|&\leqslant|f(x)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x')|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故f在$[a,b]$上一致连续. 证毕.

对闭区间上的连续函数，我们在高等数学中已经学习了有界性定理、最值定理、零点定理和介值定理，加上现在的一致连续定理，使我们对闭区间上的连续函数的性质有了更进一步的了解.

2. 函数列的一致收敛性

在讨论函数列的极限时，我们发现即使是连续函数列，也不能保证它的极限函数是连续的. 例如，对$[0,1]$上的连续函数列$f_n=x^n$，其极限函数

$$f=\lim_{n\to\infty}f_n=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\1, & x=1\end{cases}\tag{1.5.3}$$

在$[0,1]$上有间断点$x=1$从而不连续. 因此，我们有必要引入更强的收敛性概念——函数列的一致连续性概念，以保证极限函数的连续性.

和函数的连续性一样，函数列的收敛性也是一个局部概念. 我们说$\{f_n\}$在区间E上收敛到f，指的是给定$x\in E$，$f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$，用$\varepsilon$-$\delta$语言来讲，就是$\forall x\in E$，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon,x)\in\mathbf{N}$，只要$n>N$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，将描述局部性态的$N(\varepsilon,x)$换为描述整体性态的$N(\varepsilon)$，就得到一致收敛的概念.

定义 1.5.2　设函数列$\{f_n\}$在点集E上有定义，f是它的极限函数. 若$\forall\varepsilon>$

0，$\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，使得对 $\forall x\in E$，只要 $n>N$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f，记作 $f_n\rightrightarrows f(n\to\infty)$.

例 1.5.2 $f_n=x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛到 f，f 见式(1.5.3).

证 对于 $\varepsilon=\frac{1}{3}>0$ 及 $\forall N\in\mathbf{N}$，取

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+1}}$$

及 $n=N+1>N$，则有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_{N+1}(x)|=\frac{1}{2}\geqslant\varepsilon,$$

故 $f_n=x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛到 f.

注 本例证明的关键，在于掌握说反话的技巧. 其要点，在于将“$\forall$”改为“$\exists$”，将“$\exists$”改为“$\forall$”，将“$<$”改为“$\geqslant$”，将“$>$”改为“$\leqslant$”，依此类推.

对照定义 1.5.2，就可以得到 $\{f_n\}$ 在 E 上不一致收敛于 f 的定义，即：若 $\exists\varepsilon>0$，对 $\forall N\in\mathbf{N}$，$\exists x\in E$，$\exists n>N$，使得

$$|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon,$$

则 $\{f_n\}$ 在 E 上不一致收敛于 f.

一致收敛的函数列具有下列性质：

定理 1.5.2 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的连续函数列，且在 E 上一致收敛于函数 f，则 f 在 E 上连续.

证 $\forall\varepsilon>0$，由 $f_n\rightrightarrows f$ 于 E，知 $\exists N\in\mathbf{N}$，使 $\forall x\in E$，只要 $n>N$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3};$$

$\forall x_0\in E$，由 f_{N+1} 在 x_0 处连续，知 $\exists\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

此时，由

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&\leqslant|f(x)-f_{N+1}(x)|+|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(x_0)|\\&\quad+|f_{N+1}(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

知 f 在 x_0 处连续，再由 x_0 的任意性，知 f 在 E 上连续. 证毕.

注 若 $E=[a,b]$，则由定理 1.5.1，得 f 在 E 上一致连续.

定理 1.5.3 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列，且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f，则 f 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.5.4}$$

证　由定理 1.5.2,知 f 在$[a,b]$上连续,故 f 在$[a,b]$上可积.

再由一致收敛的定义,知 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in \mathbf{N}$,使得对 $\forall x\in[a,b]$,只要 $n>N$,就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

从而有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$
$$<\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}x=\varepsilon,$$

故由定义,式(1.5.4)成立. 证毕.

注意到式(1.5.4)可以改写为

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

故定理 1.5.3 的意义在于极限号可以与积分号交换次序.

最后,再介绍一条闭区间上连续函数的性质:

定理 1.5.4(Weierstrass[①] 多项式逼近定理)　闭区间$[a,b]$上的连续函数都可以表为某一多项式列的一致收敛极限.

习　题　1.5

1. 设 f 的导函数 f' 在$(-\infty,\infty)$上有界,证明:f 在$(-\infty,\infty)$上一致连续.
2. 证明:函数

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

在$(0,2\pi)$上一致连续.

3. 证明:函数列$\{nx^{n-1}\}$在$[0,1]$上不一致收敛.
4. 证明:函数列$\left\{\frac{x}{1+n^2x^2}\right\}$在$[0,1]$上一致收敛,并求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x.$$

1.6　点集与测度

1. 点集

实数集 $\mathbf{R}$ 对应于实轴上的点,下面就来讨论 $\mathbf{R}$ 中点集的内部结构.

---

① 魏尔斯特拉斯(1815～1897 年),德国数学家,复变函数论的奠基人之一.

(1) 内点与聚点

定义 1.6.1 设 $E\subset\mathbf{R}$, $x_0\in\mathbf{R}$. 若 $\exists\delta>0$, 使得 x_0 的 δ 邻域

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset E,$$

则称 x_0 为 E 的**内点**；若 $\forall\delta>0$，总有

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap(E\setminus\{x_0\})\neq\varnothing,$$

则称 x_0 为 E 的**聚点**.

E 的内点一定属于 E，但 E 的聚点可以属于 E，也可以不属于 E. 对实数集而言，内点一定是聚点.

注 若 x_0 为 E 的聚点，则 $\forall n\in\mathbf{N}$, $\exists x_n\in E\setminus\{x_0\}$，使得

$$x_n\in\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right),$$

从而有 $x_n\to x_0$，故 x_0 为 E 中的一串异于 x_0 的点列的极限，反之亦然，故聚点也称为极限点.

(2) 开集与闭集

定义 1.6.2 若点集 E 中所有的点都是 E 的内点，则称 E 为**开集**；若点集 E 中包含了它所有的聚点，则称 E 为**闭集**.

开区间和闭区间就是最典型的开集和闭集.

例 1.6.1 数列 $A=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 不是闭集.

证 由于 A 有极限点 0，而 0 不在 A 内，故 A 不是闭集.

开集与闭集之间的关系是：

定理 1.6.1 开集的余集为闭集，闭集的余集为开集.

(3) 直线上的开集的构造

定理 1.6.2 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的有界点集，则

1° E 是开集 $\Leftrightarrow E$ 为至多可数个互不相交的开区间的并；

2° E 是闭集 $\Leftrightarrow E$ 为某个闭区间与该区间内某个开集的差.

2. 测度

为了把区间长度的概念推广到更一般的点集上，我们引入测度的概念.

(1) 外测度与内测度

对于直线上的区间，无论是开、闭还是半开半闭，直接定义其测度为

$$m((a,b)) = m((a,b]) = m([a,b)) = m([a,b]) = b-a.$$

对于 $\mathbf{R}$ 中的有界点集 E，我们很自然地想到用尽可能少的开区间将 E 覆盖，然后用这些开区间的长度之和来逼近 E 的"长度". 这就导致了外测度的定义.

定义 1.6.3　设 E 为区间 (a,b) 内的有界点集，则把覆盖 E 的任一组开区间的长度之和的下确界称为 E 的**外测度**，记作 $m^*(E)$，即

$$m^*(E) = \inf\{\sum_n (b_n - a_n):\ \bigcup_n (a_n,b_n) \supset E\}.$$

那么，外测度是否可以看作 E 的"长度"呢？不可以，因为它仅仅是用由外往里挤的方式来逼近 E 的结果，如果从里往外顶也能得到同样的结果，我们就可以认为它确实代表了 E 的"长度". 这就导致了内测度的定义.

定义 1.6.4　设 E 为区间 (a,b) 内的有界点集，则称

$$b-a-m^*((a,b)\backslash E)$$

为 E 的**内测度**，记作 $m_*(E)$.

有了有界点集的外测度与内测度的概念，我们就可以来定义可测集以及可测集的测度的概念了.

(2) 可测集

定义 1.6.5　有界点集 E 称为**可测的**，若

$$m^*(E) = m_*(E),$$

并称其为 E 的**测度**，记作 $m(E)$.

定义 1.6.6　无界点集 E 称为可测的，若 $\forall a>0$，$E\cap(-a,a)$ 可测，并定义其测度

$$m(E) = \lim_{a\to\infty} m(E\cap(-a,a)).$$

无界点集的测度可以是有限数（称为**有限可测集**），也可以是 $+\infty$.

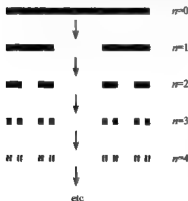


图 1-1　Cantor 集的构造过程

以下集合均为可测集：

1° $\mathbf{R}$ 中的开集、闭集；

2° 可数个可测集的并集、交集；

3° 两个可测集的差集；

4° 可测集的余集.

下面我们来看一个有趣的例子.

例 1.6.2 (Cantor 集)　如图 1-1 所示，先将 $[0,1]$ 区间三等分，去掉居中的开区间

$$G_1 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),$$

其长度为 $\frac{1}{3}$，再将余下的两个区间三等分，去掉

居中的两个开区间

$$G=\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right),$$

其长度为$\frac{2}{3^2}$，如此下去，余下的点集

$$P=[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$$

称为 **Cantor 集**.

Cantor 集具有以下性质：

1° P 是非空的有界闭集.

证　由于所有去掉的小区间的端点均属于 P，故 P 非空；

由于 P 是由闭区间$[0,1]$去掉可数个互不相交的开区间的并而成，故由定理 1.6.2，知 P 闭.

2° P 的测度为 0.

证　由于去掉的小区间的测度之和为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=\frac{1/3}{1-2/3}=1,$$

而区间$[0,1]$的长度也为 1，故 $m(P)=0$.

3° P 的基数为 c.

证　用三进制来表示$[0,1]$内的小数，则 $\forall x\in[0,1]$，有

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{3^k}=0.x_1x_2\cdots x_k\cdots.$$

在三进制下，去掉的开区间可表为

$$G_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=(0.1,0.2),$$

$$G_2=\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)=(0.01,0.02)\cup(0.21,0.22),\cdots,$$

故 P 外的点的三进制小数中必有一位是 1. 记

$$E=\{x=0.x_1x_2\cdots x_k\cdots;x_k=0\text{ 或 }2,k=1,2,\cdots\},$$

则有

$$E\subset P\subset[0,1].$$

又 E 中点 x 与二进制小数

$$y=0.\frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2}\cdots\frac{x_k}{2}\cdots$$

一一对应,故$|E|=c$,再由$|[0,1]|=c$,得

$$|P|=c.$$

Cantor 集的奇妙之处在于,它与整个实数集对等,但“长度”却为 0!

3. 零测集与几乎处处

像 Cantor 集这样的测度为 0 的点集,我们称之为**零测集**.

例 1.6.3　可数集是零测集.

证　设有可数集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots\}$,则 $\forall \varepsilon>0$,有

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(x_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},x_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right),$$

而这些开区间的长度之和为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon,$$

其下确界为 0,故 A 是零测集.

零测集具有下列性质:

定理 1.6.3　零测集的子集仍是零测集.

定理 1.6.4　有限个或可数个零测集之并仍是零测集.

与微积分学不同,在实分析中往往不要求所讨论的某个性质在某个点集上处处成立,而只要求其不成立的点所构成的集合是个零测集,并把这种仅在一个零测集上不成立的性质,称为**几乎处处**(almost everywhere)成立,记作 *a. e.*

例如,如果两个函数 f,g 除了在一个零测集上不相等外处处相等,则称 f 与 g **几乎处处相等**,记作

$$f=g,\quad a.e.$$

可以证明,函数的几乎处处相等是一种等价关系.

再如,如果一个函数的间断点集是一个零测集,则称这个函数**几乎处处连续**.由习题 1.3 中第 2 题,知单调函数几乎处处连续.

例 1.6.4　Dirichlet[①] 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 $\mathbf{R}$ 上几乎处处等于 0.

证　由于

$$\{x:D(x)\neq 0\}=\mathbf{Q}$$

---

① 狄利克雷(1805~1859 年),德国数学家,解析数论的创始人.

是个零测集，故 $D=0, a.e.$

4. 可测函数

在高等数学中，我们主要研究的是连续函数，而在实分析中，我们研究的是更为一般的可测函数.

定义 1.6.7 设 f 是可测集 E 上的广义实值函数(它的值可以取∞)，若 $\forall a\in\mathbf{R}$，

$$\{f\leqslant a\}=\{x:f(x)\leqslant a\}$$

为可测集，则称 f 为 E 上的**可测函数**.

注 定义中的$\{f\leqslant a\}$可以换为

$$\{f>a\},\quad \{f<a\},\quad \{f\geqslant a\}$$

中的任一个.

可以证明，可测集上的连续函数都是可测函数.

例 1.6.5 Dirichlet 函数是可测函数.

证 $\forall a\in\mathbf{R}$，因为

$$\{x:D(x)\leqslant a\}=\begin{cases}\mathbf{R}, & a\geqslant 1,\\ \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}, & 0\leqslant a<1,\\ \varnothing, & a<1\end{cases}$$

均为可测集，故 D 为可测函数.

可测函数具有下列性质：

1° 可测函数的和、差、积、商(只要 $a.e.$ 有意义)仍是可测函数；

2° 可测函数列的极限(只要存在)仍是可测函数.

习 题 1.6

1. 证明：有限个开集的交集一定是开集，并举例说明无限个开集的交集不一定是开集.

2. 设 f 在 E 上连续，

$$g=f,\quad a.e. 于 E,$$

g 是否在 E 上几乎处处连续? 为什么?

3. 证明：Riemann① 函数

$$D(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\quad (q>0, p, q \text{ 为互质的整数}),\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在$(-\infty,\infty)$上几乎处处连续.

4. 设 f 在(a,b)上可导，证明 f' 在(a,b)上可测.

---

① 黎曼(1826～1866 年)，德国数学家，复变函数论的创始人之一.

1.7　Lebesgue 积分

1. Riemann 积分

我们在高等数学所学习的定积分，是由 Riemann 于 1854 年创立的，通称为 Riemann 积分. Riemann 的贡献，是成功地将由 Dirichlet，Cauchy 所创建的只适用于连续函数的积分概念推广到有界函数，但其缺点，依然是过分地依赖连续性. 后面我们会看到，Riemann 可积的函数，都是几乎处处连续的函数. 因此，实分析的一个中心工作，就是建立一种新的积分理论——Lebesgue① 积分理论.

为了和 Lebesgue 积分进行比较，我们先回顾一下由 Darboux② 改进过的基于大小和的 Riemann 积分的定义.

(1) Riemann 积分的定义

定义 1.7.1　设 f 在 $[a,b]$ 上有界，对 $[a,b]$ 作分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

记

$$E_1=[a,x_1],\quad E_k=(x_{k-1},x_k]\quad (k=2,\cdots,n),$$

则 $[a,b]=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$. 令

$$M_k=\sup\{f(x):x\in E_k\},\quad m_k=\inf\{f(x):x\in E_k\},$$

作 Darboux 大和与 Darboux 小和

$$S_\Delta=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k,$$

$$s_\Delta=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k,$$

其中 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. 若

$$\inf_\Delta\{S_\Delta\}=\sup_\Delta\{s_\Delta\}=I,\tag{1.7.1}$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**（简称 R 可积），记作 $f\in R([a,b])$；I 为 f 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分**，记作

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

① 勒贝格（1875～1941 年），法国数学家，实变函数论的奠基人.

② 达布（1842～1917 年），法国数学家.

(2) Riemann 积分的缺点

1° 大量的有界函数不可积.

例 1.7.1 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在$[a,b]$上不是 R 可积的.

证 对$[a,b]$的任意分割 Δ,D 在每个小区间上的最大值为 1,最小值为 0,故其 Darboux 大和

$$S_\Delta=b-a,$$

Darboux 小和

$$s_\Delta=0,$$

式(1.7.1)不成立,故 D 在$[a,b]$上非 R 可积.

实际上,在$[a,b]$上

$$D=0,\quad a.e.$$

由几何直观,其在$[a,b]$上与 x 轴所围面积应为 0,而在 Riemann 意义下却不可积,这是 Riemann 积分的一大硬伤. 究其原因,在于 Dirichlet 函数是一个处处不连续的函数,这与 Riemann 可积的条件是冲突的.

定理 1.7.1 设 f 为$[a,b]$上的有界函数,则 f 为 R 可积$\Leftrightarrow f$ 在$[a,b]$上几乎处处连续.

2° 积分与极限交换次序要在很强的条件下才能做到.

由定理 1.5.3,在$\{f_n\}$是$[a,b]$上的一致收敛的连续函数列的情况下,才有

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=(R)\int_a^b \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

这是一个很苛刻的条件.

面对 Riemann 积分的诸多缺陷,1902 年,一位 27 岁的法国中学数学教师 Lebesgue 从点集的测度入手,完成了对 Riemann 积分的改造,从而引发了一场积分学上的革命.

2. Lebesgue 积分的定义

(1) 有限可测集上的有界可测函数的 Lebesgue 积分

定义 1.7.2 设 f 是有限可测集 E 上的有界可测函数,其值域属于$[\alpha,\beta]$. 对$[\alpha,\beta]$作分割

$$\Delta:\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta,$$

记

$$E_1=\{a\leqslant f\leqslant y_1\},$$
$$E_k=\{y_{k-1}<f\leqslant y_k\}\quad(k=2,\cdots,n),$$

则 $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$. 作 Lebesgue 大和与 Lebesgue 小和

$$S_L=\sum_{k=1}^{n}y_k m(E_k),\qquad s_L=\sum_{k=1}^{n}y_{k-1}m(E_k),$$

若

$$\inf_{\Delta}\{S_L\}=\sup_{\Delta}\{s_L\}=I,$$

则称 f 在 E 上 **Lebesgue 可积**(简称 L 可积),记作 $f\in L(E)$;I 为 f 在 E 上的 **Lebesgue 积分**,记作 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

注 在泛函分析中,所有积分指的都是 Lebesgue 积分. 当 $E=[a,b]$ 时,可将 f 的 Lebesgue 积分记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,而将它的 Riemann 积分记作 $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 以示区别.

从形式上看,Riemann 积分分割的是定义域,Lebesgue 积分分割的是值域,但最终还是分割了定义域,只是分割出来的是 E 的一些可测子集$\{E_k\}$(由 f 可测,知 E_k 为可测集),而不仅仅是一些小区间.

正因为 Lebesgue 积分对 E 的分割更精致,避免了 Riemann 积分大小和有时不能趋同的毛病,使得许多不 R 可积的函数 L 可积,扩大了可积函数类.

例 1.7.2 Dirichlet 函数在任一有界可测集 E 上是 L 可积的.

证 $D\subset[0,1]$,则对$[0,1]$的任一分割 Δ:$0<y_1<\cdots<y_{n-1}<1$,得 E 的一个分割

$$E_1=\{0\leqslant D\leqslant y_1\}=E\backslash\mathbf{Q},$$
$$E_2=\{y_1<D\leqslant y_2\}=\varnothing,$$
$$\cdots\cdots$$
$$E_{n-1}=\{y_{n-2}<D\leqslant y_{n-1}\}=\varnothing,$$
$$E_n=\{y_{n-1}<D\leqslant 1\}=E\cap\mathbf{Q},$$

其 Lebesgue 大和

$$S_L=y_1\times m(E_1)+1\times m(E_n)=y_1 m(E),$$

故

$$\inf_{\Delta}\{S_L\}=0.$$

同理可得$\sup_{\Delta}\{s_L\}=0$. 从而有 D 在 E 上 L 可积,且

$$\int_E D(x)\mathrm{d}x=0.$$

(2) 非负无界可测函数的 Lebesgue 积分

设 f 为可测集 E 上的非负可测函数，

① 若 $m(E)<\infty$，令

$$f_n(x)=\min\{f(x),n\},$$

则 $\{f_n\}$ 为非负递增的有界函数列，且

$$f_n\to f.$$

若 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\left\{\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\right\}$ 为一单增数列，故定义

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x;$$

② 若 $m(E)=\infty$，且对 $\forall A\subset E$，$m(A)<\infty$，$\int_A f(x)\mathrm{d}x$ 都存在，则定义

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{E\cap(-n,n)}f(x)\mathrm{d}x.$$

注 若

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty,$$

称 $f\in L(E)$；若

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\infty,$$

则称 f 在 E 上的积分存在，但记 $f\notin L(E)$.

(3) 一般可测函数的 Lebesgue 积分

对一般可测函数 f，记 f 的正部为

$$f^+=\begin{cases}f, & 若 f\geqslant 0,\\ 0, & 若 f<0,\end{cases}$$

f 的负部为

$$f^-=\begin{cases}-f, & 若 f\leqslant 0,\\ 0, & 若 f>0,\end{cases}$$

则有

$$f=f^+-f^-.$$

若 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$，$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 至少有一个是有限的，则定义

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x.$$

3. Lebesgue 积分的性质

(1) 与可测的关系

定理 1.7.2　设 f 是有限可测集 E 上的有界函数,则 f 在 E 上 L 可积$\Leftrightarrow f$ 在 E 上可测.

(2) 与 Riemann 积分的关系

定理 1.7.3　设 f 是$[a,b]$上的有界函数,则 f 在$[a,b]$上 R 可积$\Rightarrow f$ 在$[a,b]$上 L 可积,且积分值相同.

因此,计算 Riemann 可积函数的 Lebesgue 积分,也就是计算它的 Riemann 积分,故 Lebesgue 积分的重要性在理论上,而不是在计算上.

(3) 绝对可积性

定理 1.7.4　设 f 在 E 上可测,则

$$f \in L(E) \quad \Leftrightarrow \quad |f| \in L(E),$$

且

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

作为定理 1.7.4 的一个推论,若记

$$L^p(E) = \left\{f: f \text{ 在 } E \text{ 上可测}, \int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\right\}$$

为 p 次幂可积函数空间,则有

$$L^1(E) = L(E).$$

(4) 唯一性定理

定理 1.7.5　设 f 在 E 上可测,则

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0, \quad a.e. \text{ 于 } E.$$

(5) Levi① 单调收敛定理

定理 1.7.6　设$\{f_n\}$是 E 上 $a.e.$ 非负递增的可测函数列,且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad a.e. \text{ 于 } E,$$

则 f 在 E 上 $a.e.$ 非负可测,且

① 莱维(1875~1961 年),意大利数学家.

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.7.2}$$

注 Riemann 积分无此性质.

例 1.7.3 设[0,1]中的有理数集为

$$Q=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\},$$

令 $Q_n=\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$,

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in Q_n,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus Q_n,\end{cases}$$

则$\{f_n\}$非负递增且 $f_n\in R([0,1])$,但

$$f_n\to f=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus Q,\end{cases}$$

这是一 Dirichlet 函数,故 $f\notin R([0,1])$,式(1.7.2)不成立.

(6) Lebesgue 控制收敛定理

定理 1.7.7 设$\{f_n\}$是 E 上的可测函数列,若 $\exists F\in L(E)$,使得

$$|f_n|\leqslant F,\quad a.e.,\quad n=1,2,\cdots,$$

且 $f_n\to f$, $a.e.$ 于 E,则 $f\in L(E)$,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

最后两个定理表明,在 Lebesgue 积分下,极限号与积分号交换次序的条件要简单得多:

1° 对非负递增的可测的收敛函数列,可以直接交换次序;

2° 对于一般的可测收敛函数列,只要对$\{f_n\}$找到一个 L 可积的控制函数 F 即可交换次序.

下面,来看 Lebesgue 控制收敛定理的一个应用.

例 1.7.4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$.

解 因为

$$1+n^2x^2\geqslant 2nx,$$

故有

$$\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2},$$

而 $\frac{1}{2}\in L([0,1])$,故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0.$$

习　题　1.7

1. 设 $f\in L(E)$，且对所有 E 上的有界可测函数 g，都有

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

证明：$f(x)=0$，a.e. 于 E.

2. 设 $\{f_n\}$ 是 E 上单调的可测函数列，$f_1\in L(E)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ 存在. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设 $f\in L([0,1])$，$f>0$，a.e.，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^{\frac{1}{n}}(x)\mathrm{d}x=1.$$

4. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x.$$

1.8　几个重要的不等式

1. Young 不等式

定理 1.8.1（Young[①] 不等式）　设

$$p>1,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad a,b\geqslant 0,$$

则有

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1.8.1}$$

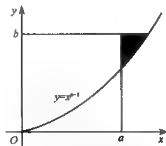


图 1-2　Young 不等式

证　平面曲线 $y=x^{p-1}$ 与 $x=a$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积为

$$\int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{a^p}{p},$$

与 $y=b$ 及 y 轴所围成的曲边梯形的面积为

$$\int_0^b y^{q-1}\mathrm{d}y=\frac{b^q}{q},$$

两者之和应不小于由 $x=a,y=b$ 与坐标轴所围成的长方形的面积(见图 1-2)，故

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

---

① 杨(1863～1942 年)，英国数学家.

证毕.

2. Hölder 不等式

定理 1.8.2(级数形式的 Hölder① 不等式) 设

$$p>1,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad x_k,y_k\in \mathbf{C},$$

式中,C 为复数域,则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},\tag{1.8.2}$$

且当右边的两个级数收敛时,左边的级数收敛.

证 令

$$a_k=\frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}},\qquad b_k=\frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}},\tag{1.8.3}$$

则有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^p=\sum_{k=1}^{n}b_k^q=1.$$

由 Young 不等式,得

$$a_kb_k\leqslant\frac{a_k^p}{p}+\frac{b_k^q}{q},$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\tag{1.8.4}$$

再将式(1.8.3)代入式(1.8.4),即得

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

当右边的两个级数收敛时,令 $n\to\infty$,得式(1.8.2). 证毕.

定理 1.8.3(积分形式的 Hölder 不等式) 设

$$p>1,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad x\in L^p(E),\quad y\in L^q(E),$$

则 $xy\in L(E)$,且

---

① 赫尔德(1859~1937 年),德国数学家.

$$\int_E |x(t)y(t)|\,dt \leqslant \left(\int_E |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (1.8.5)$$

3. Minkowski 不等式

定理 1.8.4(级数形式的 Minkowski[①] 不等式)　设 $p\geqslant 1, x_k, y_k \in \mathbf{C}$,则有

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (1.8.6)$$

且当右边的两个级数收敛时,左边的级数收敛.

证　当 $p=1$ 时,结论显然成立.

当 $p>1$,由 Hölder 不等式,有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{p-1} |x_k+y_k| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{p-1} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{p-1} |y_k| \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right],
\end{aligned}$$

等式两边同除以 $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$,即得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

则当右边的两个级数收敛时,令 $n\to\infty$,得式(1.8.6). 证毕.

定理 1.8.5 (积分形式的 Minkowski 不等式)　设

$$p\geqslant 1, \quad x, y \in L^p(E),$$

则 $x+y\in L^p(E)$,且

$$\left(\int_E |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.8.7)$$

习　题　1.8

1. 设 $x, y\in \mathbf{C}$,证明:

---

① 闵可夫斯基(1864～1909 年),德国数学家.

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leqslant\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}.$$

2. 设 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{C}$，证明：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^2\leqslant n\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2.$$

3. 证明：

$$L^2([a,b])\subset L([a,b]).$$

4. 设 $x\in C([0,1])$，证明：

$$\int_0^1 e^{x(t)}dt\int_0^1 e^{-x(t)}dt\geqslant 1.$$

第2章　距离空间

距离空间是 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的推广，它把 Euclid 空间中两点间的距离这一概念中最本质的东西概括出来，从而在一般集合上建立起抽象的距离空间理论. 距离空间在泛函分析中的作用十分重要，它为更为复杂空间中一些类似问题的统一处理提供了基础. 本章主要介绍距离空间的概念、性质及其极限理论，通过本章的学习，可以了解泛函分析描述问题的基本语言和处理问题的基本手段.

2.1　距离空间的概念

1. 距离空间的定义

定义 2.1.1　设 X 是非空集合，若存在一个映射 $d: X\times X\to\mathbf{R}$，使得 $\forall x,y,z\in X$，下列距离公理成立：

1° 非负性：

$$d(x,y)\geqslant 0,\quad d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y;$$

2° 对称性：

$$d(x,y)=d(y,x);$$

3° 三角不等式：

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),$$

则称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 的**距离**，X 为以 d 为距离的**距离空间**，记作 (X,d).

对距离空间 (X,d)，若 M 是 X 的非空子集，则 d 限制在 $M\times M$ 上还是一个距离函数，故 (M,d) 也是一个距离空间，称为 X 的**子空间**.

注　在距离空间的概念中，需要注意以下几点：

1° 由于距离满足的三条性质只是把它最本质的要求抽象出来，距离概念已由现实世界中的意义引申到一般情况，故在同一集合 X 上可以有两个不同的距离函数 d_1,d_2，此时 (X,d_1)、(X,d_2) 是两个不同的距离空间；

2° 在距离函数 d 明确或其他不引起混淆的情况下，可以直接称距离空间 (X,d) 为距离空间 X；

3° 距离空间 X 中所含的元素可以不是任何几何意义上的点，如函数或其他一些抽象的概念等，但由于赋予了距离这一几何概念，我们习惯上仍称 X 中的元素为 X 中的点.

2. 常见的距离空间

例 2.1.1 设 $\mathbf{K}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 或复数集 $\mathbf{C}$，$\forall x,y\in\mathbf{K}$，定义

$$d(x,y)=|x-y|,$$

则$(\mathbf{K},d)$是距离空间.

例 2.1.2 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{K}^n$，定义

$$d_p(x,y)=\Big(\sum_{k=1}^n|x_k-y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|,$$

则$(\mathbf{K}^n,d_p)(1\leqslant p\leqslant\infty)$均为距离空间，其中$(\mathbf{K}^n,d_2)$称为 n 维 Euclid 空间.

证 仅对 $1\leqslant p<\infty$的情形验证距离公理. 首先，$d_p(x,y)\geqslant 0$，且

$$\begin{aligned}d_p(x,y)=0 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n|x_k-y_k|^p=0\\ &\Leftrightarrow |x_k-y_k|=0\quad(k=1,2,\cdots,n)\\ &\Leftrightarrow x_k=y_k\quad(k=1,2,\cdots,n)\\ &\Leftrightarrow x=y,\end{aligned}$$

故非负性成立；其次，对称性显然成立. 最后，$\forall z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{K}^n$，由 Minkowski 不等式，有

$$\begin{aligned}d_p(x,y)&=\Big(\sum_{k=1}^n|x_k-y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &=\Big(\sum_{k=1}^n|x_k-z_k+z_k-y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n|x_k-z_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{k=1}^n|z_k-y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &=d_p(x,z)+d_p(z,y),\end{aligned}$$

故三角不等式成立，$(\mathbf{K}^n,d_p)(1\leqslant p<\infty)$均为距离空间.

注 因为

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n|x_k-y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\sqrt[p]{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|,$$

所以由夹逼定理，有

$$\lim_{p\to\infty}d_p(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|,$$

这就是为什么要把$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|$记作 $d_\infty(x,y)$的原因.

例 2.1.3 对 p 次幂可和数列空间

$$l^p=\Big\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):\sum_{k=1}^\infty|x_k|^p<\infty\Big\},$$

其中 $1\leqslant p<\infty$，定义

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

利用 Minkowski 不等式可以证明 (l^p,d_p) 为距离空间.

例 2.1.4　对有界数列空间

$$l^{\infty}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):\sup_{k\in\mathbf{N}}|x_k|<\infty\},$$

定义

$$d_{\infty}(x,y)=\sup_{k\in\mathbf{N}}|x_k-y_k|,$$

则 (l^{∞},d_{∞}) 为距离空间.

例 2.1.5　对一般的数列空间

$$\mathbf{R}^{\infty}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in\mathbf{R},k\in\mathbf{N}\},$$

$d_p(x,y)$，$d_{\infty}(x,y)$ 全部无意义，若定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k-y_k|}{2^k(1+|x_k-y_k|)},$$

则 $(\mathbf{R}^{\infty},d)$ 为距离空间.

证　由于

$$\frac{|x_k-y_k|}{2^k(1+|x_k-y_k|)}\leqslant\frac{1}{2^k},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty,$$

故 $d(x,y)$ 有意义. 显然，d 满足距离公理中的前两条，下面仅证三角不等式. 考察函数

$$s=\frac{t}{1+t}\quad(t\geqslant 0),$$

由于

$$s'=\frac{1}{(1+t)^2}>0,$$

故 s 是单调增加函数. $\forall x=(x_1,x_2,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots)$，$z=(z_1,z_2,\cdots)\in\mathbf{R}^{\infty}$，由于

$$|x_k-y_k|\leqslant|x_k-z_k|+|z_k-y_k|,$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}&\leqslant\frac{|x_k-z_k|+|z_k-y_k|}{1+|x_k-z_k|+|z_k-y_k|}\\&=\frac{|x_k-z_k|}{1+|x_k-z_k|+|z_k-y_k|}+\frac{|z_k-y_k|}{1+|x_k-z_k|+|z_k-y_k|}\\&\leqslant\frac{|x_k-z_k|}{1+|x_k-z_k|}+\frac{|z_k-y_k|}{1+|z_k-y_k|},\end{aligned}$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k-y_k|}{2^k(1+|x_k-y_k|)}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k-z_k|}{2^k(1+|x_k-z_k|)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z_k-y_k|}{2^k(1+|z_k-y_k|)},$$

即 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

例 2.1.6 对$[a,b]$上的连续函数空间 $C([a,b])$, $\forall x,y\in C([a,b])$,定义

$$d_p(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$d_\infty(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|,$$

则$(C([a,b]),d_p)(1\leqslant p\leqslant\infty)$均为距离空间.

例 2.1.7 对$[a,b]$上的具有直到 k 阶连续导数的函数空间 $C^k([a,b])$, $\forall x,y\in C^k([a,b])$,定义

$$d(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|,$$

则$(C^k([a,b]),d)$为距离空间.

例 2.1.8 对$[a,b]$上的 p 次幂可积函数空间 $L^p([a,b])$, $\forall x,y\in L^p([a,b])$,定义

$$d_p(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

则 d_p 并不是一个距离函数,因为它不满足非负性,由定理 1.7.5,

$$d_p(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}=0\iff x=y,\quad a.e.$$

而不是 $x=y$. 因此,只有把 $L^p([a,b])$中几乎处处相等的函数看作同一个函数时,$(L_p([a,b]),d_p)(1\leqslant p<\infty)$才是距离空间.

注 若 $1\leqslant p<q<\infty$, $k>1$,则上述空间具有下列包含关系:

$$l^p\subset l^q\subset l^\infty,$$

$$C^k([a,b])\subset C([a,b])\subset L^q([a,b])\subset L^p([a,b])\subset L([a,b]),$$

故小的空间也可以作为大空间的子空间而成为距离空间.

习 题 2.1

1. 设(X,d)是距离空间,证明:$\forall x,y,z,w\in X$,恒有

$$|d(x,y)-d(z,w)|\leqslant d(x,z)+d(y,w).$$

2. $\forall x=(x_1,x_2,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^\infty$,定义

$$d_\infty(x,y)=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k-y_k|,$$

证明:(l^∞,d_∞)为距离空间.

3. 设 X 是非空集合,定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}$$

证明:(X,d)是距离空间(称为**离散距离空间**).

4. 设$1\leqslant p<q<\infty$,证明:

$$l^p\subset l^q\subset l^\infty.$$

2.2 距离空间中的点集

1. 有关点的几个概念

仿照 Euclid 空间中的邻域和开集、闭集的概念,我们可以在一般距离空间中引入开球与开集、闭集的概念,为此,我们需要将内点、聚点等概念引入距离空间(X,d).

(1) 距离空间中的球与球面

定义 2.2.1 设$x_0\in X$,$r>0$,称

$$B_r(x_0)=\{x\in X:d(x,x_0)<r\}$$

为以x_0为中心,r为半径的**开球**(或x_0的r**邻域**);称

$$\overline{B}_r(x_0)=\{x\in X:d(x,x_0)\leqslant r\}$$

为以x_0为中心,r为半径的**闭球**;称

$$S_r(x_0)=\{x\in X:d(x,x_0)=r\}$$

为以x_0为中心,r为半径的**球面**.

例 2.2.1 讨论$(\mathbf{R}^2,d_p)$中开球的形状,其中$p=2,\infty$.

解 当$p=2$时,

$$B_r((x_0,y_0))=\{(x,y):\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\},$$

其形状为一圆形;当$p=\infty$时,

$$B_r((x_0,y_0))=\{(x,y):\max\{|x-x_0|,|y-y_0|\}<r\},$$

其形状为一正方形.

注 除了球的形状随距离定义的不同而不同外,开球内的点还要求是基本集X内的点,故在相同的距离定义下,不同的空间开球的形状也不同. 例如,在$(\mathbf{Q}^2,d_2)$中,开球$B_1((0,0))$所包含的只是单位圆内所有的有理坐标点,而不是单位圆本身.

(2) 距离空间中的内点与聚点

定义 2.2.2 设$A\subset X$,$x_0\in A$. 若$\exists r>0$,使得

$$B_r(x_0)\subset A,$$

则称 x_0 为 A 的**内点**. A 的内点的全体称为 A 的**内部**,记作 A°.

定义 2.2.3 设 $A\subset X$, $x_0\in X$. 若 $\forall r>0$,总有

$$B_r(x_0)\cap(A\setminus\{x_0\})\neq\varnothing,$$

则称 x_0 为 A 的**聚点**(或**极限点**). A 的聚点的全体称为 A 的**导集**,记作 A'.

定义 2.2.4 设 $A\subset X$, $x_0\in X$. 若 $\forall r>0$,总有

$$B_r(x_0)\cap A\neq\varnothing,\qquad B_r(x_0)\cap A^c\neq\varnothing,$$

则称 x_0 为 A 的**边界点**. A 的边界点的全体称为 A 的**边界**,记作 ∂A.

注 由定义,

$$\partial(A^c)=\partial A.$$

定义 2.2.5 设 $A\subset X$, $x_0\in X$. 若 $\forall r>0$,总有

$$B_r(x_0)\cap A\neq\varnothing,$$

则称 x_0 为 A 的**触点**. A 的触点的全体称为 A 的**闭包**,记作 $\overline{A}$.

由定义可以看出,A 的内点、聚点和边界点都是 A 的触点,内点与边界点互不相同,且四者间有下列关系:

$$\overline{A}=A^\circ\cup\partial A=A\cup A';\tag{2.2.1}$$

$$A^\circ=\overline{A}\setminus\partial A=A\setminus\partial A;\tag{2.2.2}$$

$$\partial A=\overline{A}\setminus A^\circ=\overline{A}\cap\overline{A^c}.\tag{2.2.3}$$

注 与直线不同,一般距离空间中的内点不一定是聚点,例如,对整数集 $\mathbf{Z}$ 和它的子集 $\mathbf{N}$, $\forall n\in\mathbf{N}$,都有

$$B_{\frac{1}{2}}(n)=\{n\}\subset\mathbf{N},$$

故 n 是 $\mathbf{N}$ 的内点,但它不是 $\mathbf{N}$ 的聚点,因为该开球中不含有 $\mathbf{N}$ 中异于 n 的点.

2. 有关集的几个概念

(1) 距离空间中的开集与闭集

定义 2.2.6 设 $A\subset X$,若

$$A=A^\circ,$$

则称 A 为 X 中的**开集**;若

$$A=\overline{A},$$

则称 A 为 X 中的**闭集**.

由定义可以看出,要证明一个集合是开集,只需证明它的所有点都是内点;要证明一个集合是闭集,只需证明它包含它所有的聚点.

由于全空间 X 中的点都是它的内点,也都是它的触点,故 X 既为 X 中的开集又为 X 中的闭集;由于空集不含有任何元素,

$$\varnothing^\circ=\varnothing,\quad \overline{\varnothing}=\varnothing,$$

故$\varnothing$既为开集又为闭集.

对于 X 的任一子集 A，A 的内部 A° 是含于 A 的最大开集，A 的闭包 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

注　一个集合是开是闭，依赖于它所依附的空间 X. 例如，集合

$$A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$$

在 $\mathbf{R}$ 中非开非闭，有聚点 0；在 $X=A\cup\{0\}$ 中开，非闭，有聚点 0；在 $X=A$ 中既开又闭，无聚点.

(2) 开集与闭集的性质

定理 2.2.1(开集与闭集的对偶性)　开集的余集是闭集，闭集的余集是开集.

证　设 A 为开集，则有 $\partial A\subset A^c$；再由式(2.2.1)，有

$$\overline{A^c}=(A^c)^\circ\cup\partial(A^c)=A^c\cup\partial(A^c)=A^c\cup\partial A=A^c,$$

故 A^c 为闭集；若 A 为闭集，则由式(2.2.2)，有

$$\begin{aligned}(A^c)^\circ&=A^c\backslash\partial(A^c)=A^c\cap(\partial(A^c))^c=(A\cup\partial(A^c))^c\\&=(A\cup\partial A)^c=(\bar{A})^c=A^c,\end{aligned}$$

故 A^c 为开集. 证毕.

定理 2.2.2　任意个开集的并集是开集，有限个开集的交集是开集.

证　设 $G_\alpha(\alpha\in I)$ 为开集，令

$$G=\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha,$$

则 $\forall x\in G$，$\exists\beta\in I$，使得 $x\in G_\beta$. 由 G_β 开，知 $\exists r>0$，使得

$$B_r(x)\subset G_\beta\subset G,$$

从而 x 为 G 的内点，故 G 为开集；又设

$$G=\bigcap_{k=1}^{n}G_k,$$

其中 $G_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为开集，则 $\forall x\in G$，有 $x\in G_k(k=1,2,\cdots,n)$. 由 G_k 开，知 $\exists r_k>0$，使得 $B_{r_k}(x)\subset G_k$，故取

$$r=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{r_k\},$$

则有

$$B_r(x)\subset\bigcap_{k=1}^{n}G_k=G,$$

从而有 x 为 G 的内点，故 G 亦为开集. 证毕.

注　任意个开集的交集不一定是开集，例如，$\left\{\left(0,1+\frac{1}{n}\right)\right\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的开集列，而

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(0,1+\frac{1}{k}\right)=(0,1]$$

不是 $\mathbf{R}$ 中的开集.

推论 有限个闭集的并集是闭集,任意个闭集的交集是闭集.

证 设 $F_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为闭集,

$$F=\bigcup_{k=1}^{n}F_k,$$

则由开集与闭集的对偶性及定理 2.2.2,知

$$F^c=(\bigcup_{k=1}^{n}F_k)^c=\bigcap_{k=1}^{n}F_k^c$$

为开集,故 F 为闭集. 同理可证,有限个闭集的交集是闭集. 证毕.

3. 有关距离的几个概念

(1) 点到集合的距离

定义 2.2.7 设 A 是 X 的非空子集,$x_0\in X$,则称

$$d(x_0,A)=\inf\{d(x_0,x):x\in A\}$$

为点 x_0 到集合 A 的距离.

定理 2.2.3 设 A 是 X 的非空子集,则 $\forall x,y\in X$,有

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y).$$

证 $\forall a\in A$,由三角不等式,得

$$d(x,A)\leqslant d(x,a)\leqslant d(x,y)+d(y,a),$$

两边同时对 $a\in A$ 取下确界,得

$$d(x,A)\leqslant d(x,y)+d(y,A),$$

$$d(x,A)-d(y,A)\leqslant d(x,y),$$

同理可得

$$d(y,A)-d(x,A)\leqslant d(x,y),$$

合之,得

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y).$$

证毕.

(2) 集合到集合的距离

定义 2.2.8 设 A,B 是 X 的两个非空子集,则称

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}$$

为集合 A 和 B 之间的距离.

(3) 集合的直径

定义 2.2.9 设 A 是 X 的非空子集,则称

$$\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$$

为集合 A 的直径(diameter)，记作 $\mathrm{diam}(A)$.

若 $\mathrm{diam}(A)<\infty$，则称 A 为有界集.

习 题 2.2

1. 设 A,B 是 X 的两个非空子集，证明：

$$(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$$

2. 设 A,B 是 X 的两个子集，且 $A\subset B$. 证明：

$$\overline{A}\subset\overline{B}.$$

3. 设 (X,d) 是离散距离空间，其中

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}$$

证明：X 中的任一子集既是开集又是闭集.

4. 设 F 为 X 中的闭集，G 为 X 中的开集，证明：$F\backslash G$ 为闭集，$G\backslash F$ 为开集.

2.3 距离空间中的极限与连续

1. 点列的收敛性

有了距离的概念，我们就可以描述空间中两点的接近程度，从而可以定义极限的概念.

(1) 距离空间中点列收敛的概念

定义 2.3.1 设 $\{x_n\}$ 是距离空间 (X,d) 中的一个点列，$x_0\in X$. 若

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0,$$

则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 或 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$.

定理 2.3.1(极限的唯一性) 距离空间中的收敛点列的极限唯一.

证 设有 $x_n\to x$，$x_n\to y$，则由

$$0\leqslant d(x,y)\leqslant d(x,x_n)+d(x_n,y)\to 0$$

知 $d(x,y)=0$，故 $x=y$. 证毕.

定理 2.3.2 若在距离空间 (X,d) 中有 $x_n\to x$，$y_n\to y$，则

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=d(x,y).$$

证 由三角不等式，有

$$d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x)+d(x,y)+d(y,y_n),$$

$$d(x_n,y_n)-d(x,y)\leqslant d(x_n,x)+d(y_n,y),$$

同理可得

$$d(x,y)-d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x)+d(y_n,y),$$

合之,得

$$|d(x_n,y_n)-d(x,y)|\leqslant d(x_n,x)+d(y_n,y),$$

故当 $n\to\infty$ 时,有

$$d(x_n,y_n)\to d(x,y).$$

证毕.

有了收敛性的概念,我们还可以给出闭集的一个等价刻画,它表明,闭集的本质特征是对极限运算封闭.

定理 2.3.3 A 为闭集 $\Leftrightarrow$ 任给 $\{x_n\}\subset A$,若 $x_n\to x_0$,则 $x_0\in A$.

证 必要性:若 $x_0\notin A$,则 $x_0\in A^c$,由 A 闭,知 A^c 开,故 $\exists r>0$,使得

$$B_r(x_0)\subset A^c,$$

即在 x_0 的 r 邻域中无 A 中的点,这与 $x_n\to x_0$ 且 $\{x_n\}\subset A$ 矛盾,故 $x\in A$.

充分性:$\forall x_0\in\overline{A}$,则对 $r=\frac{1}{n}>0$,由

$$B_r(x_0)\cap A\neq\varnothing$$

知 $\exists x_n\in A$,使得 $x_n\in B_{1/n}(x_0)$. 由 $x_n\to x_0$,我们有 $x_0\in A$,故 $\overline{A}\subset A$,再由 $A\subset\overline{A}$,得 $A=\overline{A}$,A 为闭集. 证毕.

(2) 不同空间中收敛性的比较

例 2.3.1 设有 $(\mathbf{K}^n,d_p)(1\leqslant p<\infty)$ 中的点列

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},\quad x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$$

和一点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则当 $k\to\infty$ 时,有

$$x^{(k)}\to x\quad\Leftrightarrow\quad d_p(x^{(k)},x)=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}-x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\to 0$$

$$\Leftrightarrow\quad x_i^{(k)}\to x_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

故 Euclid 空间中点列的收敛等价于向量的按坐标收敛.

例 2.3.2 设有 (l^p,d_p) 中的点列

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)},\cdots)$$

和一点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$,则当 $k\to\infty$ 时,有

$$x^{(k)}\to x\quad\Leftrightarrow\quad d_p(x^{(k)},x)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\to 0$$

$$\Rightarrow\quad x_n^{(k)}\to x_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

故 p 次幂可和数列空间中点列的收敛强于按坐标收敛.

实际上,对 (l^p,d_p) 中的点列

$$x^{(k)}=(0,\cdots,0,\underset{k}{1},0,\cdots)\quad(k=1,2,\cdots),$$

则$\{x^{(k)}\}$按坐标收敛于

$$\theta=(0,0,\cdots,0,\cdots).$$

由于

$$d_p(x^{(k)},\theta)=(0^p+\cdots+0^p+1^p+0^p+\cdots)^{\frac{1}{p}}=1$$

不可能趋于0,故$\{x^{(k)}\}$不收敛.

例 2.3.3　设有$(C([a,b]),d_\infty)$中的点列$\{f_n\}$和一点f,则当$n\to\infty$时,有

$$f_n\to f \iff d_\infty(f_n,f)=\max_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|\to 0,$$

此即$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$,使当$n>N$,有

$$\max_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon,$$

换言之,$\forall t\in[a,b]$,只要$n>N$,就有

$$|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon,$$

故$[a,b]$上连续函数空间中点列的收敛等价于函数列的一致收敛.

例 2.3.4　设有$(L^p([a,b]),d_p)$中的点列$\{f_n\}$和一点f,则当$n\to\infty$时,有

$$f_n\to f \iff d_p(f_n,f)=\left(\int_a^b|f_n(t)-f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\to 0,$$

故其上的点列收敛称为**p次幂平均收敛**.

点列的p次幂平均收敛是一种相对较弱的收敛性,有时不要说函数列的几乎处处收敛,甚至连其各点的收敛性都不能保证.

例如,对$(L^p([0,1)),d_p)$中的点列$\{f_n\}$,其中

$$f_1=g_1^{(2)}(t)=\begin{cases}1,t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\0,t\notin\left[0,\frac{1}{2}\right),\end{cases}\quad f_2=g_2^{(2)}(t)=\begin{cases}1,t\in\left[\frac{1}{2},1\right),\\0,t\notin\left[\frac{1}{2},1\right),\end{cases}$$

$$f_3=g_1^{(3)}(t)=\begin{cases}1,t\in\left[0,\frac{1}{3}\right),\\0,t\notin\left[0,\frac{1}{3}\right),\end{cases}\quad f_4=g_2^{(3)}(t)=\begin{cases}1,t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\\0,t\notin\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\end{cases}$$

$$f_5=g_3^{(3)}(t)=\begin{cases}1,t\in\left[\frac{1}{3},\frac{3}{3}\right),\\0,t\notin\left[\frac{1}{3},\frac{3}{3}\right),\end{cases}\cdots$$

一般地,有

$$f_{\frac{k(k-1)}{2}+i-1}=g_i^{(k)}(t)=\begin{cases}1,t\in\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right),\\0,t\notin\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right),\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,k.$$

由于

$$\int_0^1 [g_i^{(k)}(t)]^p \mathrm{d}t = \frac{1}{k} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

故$\{f_n\}$在$[0,1)$上 p 次幂平均收敛于 0,但$\forall t \in [0,1)$,$\{f_n(t)\}$中有无穷多个等于 1,也有无穷多个等于 0,故$\{f_n(t)\}$在区间$[0,1)$中点点不收敛. 尽管如此,可以保证的是$\{f_n\}$必有一子列$\{f_{n_k}\}$ $a.e.$ 收敛于 f.

2. 映射的连续性

(1) 连续性的概念

定义 2.3.2 设(X,d_1),(Y,d_2)为两个距离空间,$f:X \to Y$ 是一个映射,$x_0 \in X$. 若$\forall \varepsilon>0$,$\exists \delta>0$,只要 $d_1(x,x_0)<\delta$,就有

$$d_2(f(x),f(x_0)) < \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处连续;若 f 在 X 内点点连续,则称 f 在 X 上连续.

将映射 f 在 x_0 处的连续性定义的 ε-δ 语言用集合形式表示出来,就是$\forall \varepsilon>0$,$\exists \delta>0$,使得

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

(2) 用开、闭集刻画连续性

定理 2.3.4 设有映射 $f:X \to Y$,则下列命题等价:

① f 为连续映射;

② Y 中任一开集 G 的原像集 $f^{-1}(G)$是 X 中的开集;

③ Y 中任一闭集 F 的原像集 $f^{-1}(F)$是 X 中的闭集.

证 ①⇒②:$\forall x_0 \in f^{-1}(G)$,由 $f(x_0) \in G$ 及 G 开,知$\exists \varepsilon>0$,使得 $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset G$;再由 f 连续,知$\exists \delta>0$,使得

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \subset G,$$

从而有

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(G),$$

式中,$f^{-1}(G)$是开集.

②⇒①:$\forall x_0 \in X$,$\forall \varepsilon>0$,由 $B_\varepsilon(f(x_0))$为开集,知 $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x_0))]$开;再由 $x_0 \in f^{-1}[B_\varepsilon(f(x_0))]$,知$\exists \delta>0$,使

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x_0)],$$

从而有

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)),$$

即 f 在 x_0 处连续.

②⇔③:当②成立时,若 B 为 Y 中的闭集,则 B^c 为开集,从而有 $f^{-1}(B^c)$为 X 中的开集,再由式(1.2.4),有

$$[f^{-1}(B)]^c = f^{-1}(B^c),$$

从而得 $f^{-1}(B)$ 为闭集，故③成立，反之亦然. 证毕.

有了定理 2.3.4，对 X 上的连续泛函 f，我们可以很轻松地判定集合

$$\{f < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$$

为开集，

$$\{f \geqslant a\} = f^{-1}([a, \infty))$$

为闭集，等等.

例 2.3.5 在 $n\times n$ 阶实矩阵空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中，记可逆矩阵的全体为 G，则 G 为开集.

证 定义 $f: \mathbf{R}^{n\times n} \to \mathbf{R}$ 为

$$f(A) = |A|,$$

则 f 为一连续泛函. 由于

$$\begin{aligned} G &= \{A \in \mathbf{R}^{n\times n}: |A| \neq 0\} \\ &= \{|A| \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\} \\ &= f^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)), \end{aligned}$$

而 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 为 $\mathbf{R}$ 中的开集，故由定理 2.3.4，G 为 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的开集.

习 题 2.3

1. 设 (X, d) 是距离空间，A 是 X 的非空子集，证明：$d(x, A)$ 是 X 上的一个连续泛函.

2. 设 F_1, F_2 是 X 中的互不相交的非空闭集，证明：存在 X 中的两个互不相交的开集 G_1，G_2，使得

$$F_1 \subset G_1, \quad F_2 \subset G_2.$$

3. 设 A, B 是 X 中的两个互不相交的闭集，证明：存在 X 上的连续泛函 f，使得当 $x\in A$ 时，$f(x)=0$；当 $x \in B$ 时，$f(x)=1$.

4. 设 $f: X\to Y$ 为连续映射，证明：对于 X 的任一子集 A，都有

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

2.4 稠密性与可分性

1. 稠密性

定义 2.4.1 设 A, B 是距离空间 X 的两个子集，则

1° A 称为 X 中的稠集，若

$$\overline{A} = X;$$

2° A 称为 B 的稠子集，若

$$A \subset B \subset \overline{A};$$

3° A 称为在 B 中稠密，若

$$B\subset\overline{A}.$$

定理 2.4.1 设 $A,B\subset X$,则 A 在 B 中稠密 $\Leftrightarrow \forall x\in B,\exists\{x_n\}\subset A$,使得

$$x_n\to x\quad(n\to\infty).$$

证 必要性:若 A 在 B 中稠密,则 $\forall x\in B\subset\overline{A}$,对 $r_n(r_n>0)\to 0$,总有 $B_{r_n}(x)\cap A\neq\varnothing$,换言之,$\exists x_n\in A$,使得

$$d(x_n,x)\leqslant r_n,$$

从而有 $x_n\to x(n\to\infty)$.

充分性:$\forall x\in B$,若 $\exists r>0$,使得 $B_r(x)\cap A=\varnothing$,则与 $\exists\{x_n\}\subset A$,使得 $x_n\to x$ 矛盾,故 $\forall r>0$,总有

$$B_r(x)\cap A\neq\varnothing,$$

故 $x\in\overline{A}$,从而有 $B\subset\overline{A}$,A 在 B 中稠密. 证毕.

注 A 在 B 中稠密,表示 B 中的点可用 A 中的一串点来逼近,并不要求 A 是 B 的子集.

例 2.4.1 由于任一无理数 a 都可以用它的精确度为10^{-n}的不足近似值 a_n 来逼近,而 $a_n\in\mathbf{Q}$,故有理数集 $\mathbf{Q}$ 在无理数集中稠密,$\mathbf{Q}$ 为 $\mathbf{R}$ 的稠集.

2. 可分性

定义 2.4.2 距离空间(X,d)称为可分的,若 X 具有可数的稠集. X 的子集 A 称为可分的,若 A 具有可数的稠子集.

例 2.4.2 空间$(\mathbf{R}^n,d_2)$是可分的,它的一个可数稠集是 $\mathbf{R}^n$ 中有理坐标点的全体

$$\mathbf{Q}^n=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n);r_i\in\mathbf{Q},i=1,2,\cdots,n\}.$$

例 2.4.3 空间(l^p,d_p)是可分的,它的一个可数稠集是

$$M=\{(r_1,r_2,\cdots,r_k,0,\cdots);r_i\in\mathbf{Q},i=1,2,\cdots,k,k\in\mathbf{N}\}.$$

证 令

$$M_k=\{(r_1,r_2,\cdots,r_k,0,\cdots);r_i\in\mathbf{Q},i=1,2,\cdots,k\}.$$

则有

$$M=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k,$$

由于 M_k 与 $\mathbf{Q}^k$ 是对等的,故 M_k 是可数集,从而 M 也是可数集.

$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in l^p$,由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty,$$

故对 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$,$\exists N\in\mathbf{N}$,使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2};$$

再由有理坐标点在 $\mathbf{R}^N$ 中的稠密性，知 $\exists r_n = (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \cdots, r_N^{(n)}, 0, \cdots) \in M$，使得

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k - r_k^{(n)}|^p < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

合之，得

$$d(x, r_n) = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - r_k^{(n)}|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon = \frac{1}{n},$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, r_n) = 0$，即 $r_n \to x$.

例 2.4.4 空间 $(C([a,b]), d_\infty)$ 是可分的，它的一个可数稠集是有理系数多项式的全体.

证 $\forall x \in C([a,b])$，由 Weierstrass 多项式逼近定理，x 可以表为某一多项式列 $\{P_n\}$ 的一致收敛极限，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}$，使对 $\forall t \in [a,b]$，只要 $n > N$，就有

$$|P_n(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而有

$$d_\infty(P_n, x) = \max_{t\in[a,b]} |P_n(t) - x(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

再由有理数集在实数中的稠密性，知存在一列有理系数多项式 $\{Q_n\}$ 使得

$$d_\infty(P_n, Q_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而有

$$d_\infty(Q_n, x) \leqslant d_\infty(P_n, Q_n) + d_\infty(P_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 $Q_n \to x\ (n \to \infty)$.

例 2.4.5 空间 $(L^p([a,b]), d_p)$ 是可分的，有理系数多项式的全体是它的一个可数稠集.

下面看两个不可分的例子.

例 2.4.6 记 $X = [0,1]$，

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

则 (X, d) 是不可分的.

证 反证. 设 X 可分，则有可数稠集 $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$. 但 $[0,1]$ 是不可数集，故 $A \neq X$. 对 $x_0 \in X \backslash A$，当 $r < 1$ 时，有

$$B_r(x_0) \cap A = \{x_0\} \cap A = \varnothing,$$

这与 A 在 X 中稠密矛盾，故 X 是不可分的.

例 2.4.7 空间(l^∞,d_∞)是不可分的.

证 由定理 1.3.4 注,集

$$D=\{(x_1,x_2,\cdots):x_k=0,1\}$$

为不可数集,且 $D\subset l^\infty$. 设 l^∞ 可分,则有可数稠集

$$A=\{a_1,a_2,\cdots\},$$

于是有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{\frac{1}{3}}(a_k)\supset l^\infty\supset D.$$

由 D 不可数,知必有一开球 $B_{1/3}(a_{k_0})$含有 D 中至少两个点 $x^{(1)},x^{(2)}$,此时,

$$1=d_\infty(x^{(1)},x^{(2)})\leqslant d_\infty(x^{(1)},a_{k_0})+d_\infty(a_{k_0},x^{(2)})<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

矛盾,故 l^∞ 不可分.

习 题 2.4

1. 设 X 为距离空间,证明:

$$A\text{ 为 }X\text{ 中的稠集}\iff A^c\text{ 中无内点.}$$

2. 设 X 和 Y 均为距离空间,$f:X\to Y$ 为连续映射,A 在 X 中稠密. 证明:$f(A)$在 $f(X)$中稠密.

3. 设(X,d)是离散距离空间,其中

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}$$

证明:X 可分的充分必要条件是 X 为可数集.

4. 证明:可分距离空间 X 的任一子集 A 都是可分的,即存在 A 的可数子集 B,使得 $A\subset\overline{B}$.

2.5 距离空间的完备性

1. 完备的距离空间

在第 1 章我们介绍了实数集的完备性,现在将这一概念引入一般的距离空间.

(1) 完备距离空间的概念

定义 2.5.1 距离空间(X,d)中的点列$\{x_n\}$称为 **Cauchy 列(或基本列)**,若 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$,使当 $m,n>N$ 时,有

$$d(x_m,x_n)<\varepsilon.$$

注 由定义可以看出,$\{x_n\}$为 Cauchy 列的充分必要条件如下:

$$d(x_m,x_n)\to 0\quad(m,n\to\infty).$$

定理 2.5.1 距离空间中的任一收敛点列必是 Cauchy 列,但 Cauchy 列不一

定是收敛点列.

证　设 $x_n \to a$，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，只要 $n>N$，就有

$$d(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当 $m,n>N$ 时，就有

$$d(x_m,x_n)\leqslant d(x_m,a)+d(a,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中，令 a_n 为 π 的精确到 10^{-n} 的不足近似值：

$$a_1=3.1,\quad a_2=3.14,\quad a_3=3.141,\quad \cdots,$$

则 $\forall \varepsilon>0$，取 $N>-\lg\varepsilon$，则当 $m>n>N$ 时，就有

$$d(x_m,x_n)<\frac{1}{10^n}<\varepsilon,$$

故 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列，但由于其极限 $\pi\notin\mathbf{Q}$，所以 $\{a_n\}$ 在 $\mathbf{Q}$ 内不收敛. 证毕.

定义 2.5.2　距离空间 (X,d) 称为**完备的**，若 X 中的任一 Cauchy 列都收敛到 X 中的一点.

由于在完备空间中要证明一个点列收敛，只需证明它是 Cauchy 列，而不必预先知道极限值，并且完备性可以使得一些经典的分析理论在距离空间中继续延续下去，故在泛函分析中主要的研究对象是完备空间.

例 2.5.1　Euclid 空间 $(\mathbf{R}^n,d_2)$ 是完备的距离空间.

证　设 $\{x^{(k)}\}$ 是 $(\mathbf{R}^n,d_2)$ 中的 Cauchy 列，

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},\quad x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}),$$

则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使当 $m,k>N$ 时，有

$$d_2(x^{(m)},x^{(k)})<\varepsilon.$$

固定 $i(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$|x_i^{(m)}-x_i^{(k)}|\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j^{(m)}-x_j^{(k)}|^2}=d_2(x^{(m)},x^{(k)})<\varepsilon,$$

故 $\{x_i^{(k)}\}$ 为 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 列，再由 $\mathbf{R}$ 的完备性，知 $\exists x_i^{(0)}\in\mathbf{R}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^{(0)}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

令

$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),$$

则有 $x^{(k)}\to x^{(0)}(k\to\infty)$，故 $(\mathbf{R}^n,d_2)$ 是完备的.

注　对复数域 $\mathbf{C}$，$(\mathbf{C}^n,d_2)$ 也是完备的距离空间.

例 2.5.2　p 次幂可和数列空间 (l^p,d_p) 是完备的距离空间.

例 2.5.3　有界数列空间 (l^∞,d_∞) 是完备的距离空间.

例 2.5.4 连续函数空间$(C([a,b]),d_\infty)$是完备的距离空间.

证 设$\{x_n\}$是$(C([a,b]),d_\infty)$中的 Cauchy 列,则$\forall \varepsilon>0$,$\exists N\in \mathbf{N}$,使当n, $m>N$时,有

$$d_\infty(x_n,x_m)=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

固定t,由

$$|x_n(t)-x_m(t)|\leqslant d_\infty(x_n,x_m)<\varepsilon \tag{2.5.1}$$

知$\{x_n(t)\}$是$\mathbf{R}$中的 Cauchy 列,故有极限$x(t)$. 在式(2.4.1)中令$m\to\infty$,得

$$|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon,$$

从而有

$$d_\infty(x_n,x)=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon,$$

故$\{x_n\}$一致收敛到x. 再由一致收敛定理,$x(t)$在$[a,b]$上一致连续,从而有$x(t)\in C([a,b])$,故$(C([a,b]),d_\infty)$是完备的.

注 $(C([a,b]),d_p)(1\leqslant p<\infty)$不完备. 令

$$x_n(t)=\arctan n(t-a),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & a<t\leqslant b,\\ 0, & t=a,\end{cases}$$

由$|x_n(t)|\leqslant\frac{\pi}{2}$和 Lebesgue 控制收敛定理,有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}d_p(x_n,x)&=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b|x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_a^b\lim_{n\to\infty}|x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}=0,\end{aligned}$$

从而有

$$d_p(x_m,x_n)\leqslant d_p(x_m,x)+d_p(x_n,x)\to 0(m,n\to\infty),$$

故$\{x_n\}$为$(C([a,b]),d_p)$中的 Cauchy 列,但$x\notin C([a,b])$.

例 2.5.5 p次幂可积函数空间$(L^p([a,b]),d_p)$是完备的距离空间.

(2) 完备距离空间的性质

定理 2.5.2 设(X,d)是完备的距离空间,$M\subset X$,则(M,d)完备$\Leftrightarrow M$为X中的闭集.

证 必要性:$\forall x\in M'$,则$\exists\{x_n\}\subset M$,使得$x_n\to x$. 由于收敛列必为 Cauchy 列,故由M的完备性,$\{x_n\}$收敛到M中的一点y,再由极限的唯一性,得$x=y$,从而有$x\in M$,故$M'\subset M$,M为X中的闭集.

充分性：设$\{x_n\}$为M中的Cauchy列，则它也是X中的Cauchy列，由X的完备性，知$\exists x\in X$，使得$x_n\to x$，再由M闭，得$x\in M$，从而有(M,d)完备. 证毕.

下面，我们将实数集的区间套定理（定理1.4.3）推广到完备距离空间中去.

定义2.5.3　距离空间X中一列闭球

$$K_n=\overline{B}_{r_n}(x_n)$$

称为一个**闭球套**，若$K_1\supset K_2\supset\cdots\supset K_n\supset\cdots$，且

$$\lim_{n\to\infty}r_n=0.$$

定理2.5.3（闭球套定理）　设X是完备的距离空间，则对X中的任一闭球套，存在唯一一点x_0属于所有闭球.

证　存在性：由$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$，知对$m>n$，有

$$d(x_m,x_n)<r_n\to 0\quad(n\to\infty),$$

故$\{x_n\}$是X中的Cauchy列，由X的完备性，知$\exists x_0\in X$，使$x_n\to x_0$. 给定n，由$K_n\supset K_{n+1}\supset\cdots$，知

$$\{x_n,x_{n+1},\cdots\}\subset K_n,$$

再由K_n闭，知$x_0\in K_n$，最后由n的任意性，得

$$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n.$$

唯一性：设$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n$，则由

$$d(x_0,x)\leqslant d(x_0,x_n)+d(x_n,x)\leqslant 2r_n\to 0$$

得$d(x_0,x)=0$，从而有$x=x_0$. 证毕.

2. 距离空间的完备化

不完备的距离空间对极限运算不封闭，因此我们希望能够将不完备的距离空间"扩充"为完备的距离空间.

例如，对有理数集**Q**，包含它的最小完备距离空间是实数集**R**，注意到**Q**在**R**中稠密，这就提示我们通过嵌入的方式来解决这一问题.

定义2.5.4　设(X,d)，$(\widetilde{X},\widetilde{d})$为距离空间，若存在一一映射

$$T:X\to\widetilde{X},$$

使得$\forall x,y\in X$，都有

$$\widetilde{d}(Tx,Ty)=d(x,y),$$

则称(X,d)与$(\widetilde{X},\widetilde{d})$**等距同构**，$T$为$X$到$Y$的**等距同构映射**.

定义2.5.5　完备距离空间$(\widetilde{X},\widetilde{d})$称为距离空间$(X,d)$的**完备化空间**，若$(X,d)$与$(\widetilde{X},\widetilde{d})$的某一稠集等距同构.

下面的定理回答了完备化空间的存在性与唯一性问题：

定理 2.5.4 任一距离空间都存在完备化空间，且完备化空间在等距同构的意义下唯一.

例 2.5.6 有理数集 Q 的完备化空间是实数集 R.

例 2.5.7 连续函数空间$(C([a,b]),d_p)(1\leqslant p<\infty)$的完备化空间是 p 次幂可积函数空间$(L^p([a,b]),d_p)$.

例 2.5.8 Riemann 可积函数空间$(R([a,b]),d_1)$的完备化空间是 Lebesgue 可积函数空间$(L([a,b]),d_1)$，它揭示了 Riemann 积分扩充到 Lebesgue 积分的本质.

习 题 2.5

1. 设$\{x_n\}$为距离空间(X,d)中的 Cauchy 列，且它有某个子列$\{x_{n_k}\}$收敛，则$\{x_n\}$本身也收敛.
2. 证明：有界数列空间(l^∞,d_∞)是完备的.
3. 对极限为 0 的数列空间

$$c_0=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):\lim_{n\to\infty}x_n=0\},$$

证明：(c_0,d_∞)是(l^∞,d_∞)的完备子空间.

4. 设

$$M=\{(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots):x_1,\cdots,x_n\text{ 不全为 }0,n\in\mathbf{N}\},$$

$\forall x,y\in M$，令

$$d(x,y)=\sup_i|x_i-y_i|,$$

(M,d)是否完备？其完备化空间是什么？

2.6 Baire 纲定理

1. Baire 分类

在数学论证中，经常会遇到两类存在性问题：

1° 确定某种对象的存在性，即至少存在一个；

2° 确定某种对象的普遍存在性，即存在充分多个.

解答第 1°类问题的有各种存在性定理，解答第 2°类问题的有著名的 Baire① 纲定理，它与第 5 章中的 Hahn-Banach 延拓定理一起构成了泛函分析的两大基石.

普遍是相对于稀有而言的，为了恰当地描述稀有性与普遍性，我们引入下列概念.

定义 2.6.1 设 A 是距离空间 X 的子集，满足

① 贝尔(1874～1932 年)，法国数学家.

$$(\bar{A})^\circ = \varnothing,$$

即其闭包没有内点,则称 A 为**疏集**.

例 2.6.1　$\mathbf{R}^n$ 中的任一有限集都是疏集,特别地,单点集是疏集.

证　设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有限集,则

$$(\bar{A})^\circ = A^\circ = \varnothing,$$

故 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的疏集.

例 2.6.2　$\mathbf{R}$ 中的有理数集 $\mathbf{Q}$ 不是疏集.

证　在 $\mathbf{R}$ 中,

$$(\bar{\mathbf{Q}})^\circ = \mathbf{R}^\circ = \mathbf{R} \neq \varnothing,$$

故 $\mathbf{Q}$ 不是疏集.

定义 2.6.2　设 A 是距离空间 X 的子集,若 A 是至多可数个疏集的并,则称 A 为**第一纲集**,否则称为**第二纲集**.

例 2.6.3　$\mathbf{R}^n$ 中的任一可数集是第一纲集.

证　设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可数集,则

$$A = \{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\},$$

而 $\mathbf{R}^n$ 中的单点集是疏集,故 A 是第一纲集.

如果某个第一纲集 A 的余集 A^c 是第二纲集,则 A 所代表的属性相对于 A^c 来说就是稀有的,而 A^c 所代表的属性相对于 A 来说就是普遍的. 要做到这一点,还需要有下列定理的支持.

2. Baire 纲定理

定理 2.6.1(Baire 纲定理)　非空的完备距离空间 X 是第二纲集.

证　反证. 若 X 是第一纲集,则有

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

其中 A_k 是疏集. 对 X 的任一非空开集 G,都应有

$$G\backslash \bar{A}_k \neq \varnothing,$$

否则由 $G\backslash \bar{A}_k=\varnothing$,可得 $G\subset \bar{A}_k$,再由 G 开,就有

$$G = G^\circ \subset (\bar{A}_k)^\circ = \varnothing,$$

这与 G 非空矛盾.

对非空开集 $X\backslash \bar{A}_1$,$\exists \bar{B}_{r_1}(x_1)(0<r_1<1)$,使得

$$\bar{B}_{r_1}(x_1) \subset X\backslash \bar{A}_1;$$

对非空开集 $B_{r_1}(x_1)\backslash \bar{A}_2$,$\exists \bar{B}_{r_2}(x_2)\left(0<r_2<\frac{1}{2}\right)$,使得

$$\bar{B}_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1)\backslash \bar{A}_2;$$

一般地,对非空开集 $B_{r_{k-1}}(x_{k-1})\setminus\bar{A}_k$,$\exists\bar{B}_{r_k}(x_k)\left(0<r_k<\frac{1}{k}\right)$,使得

$$\bar{B}_{r_k}(x_k)\subset B_{r_{k-1}}(x_{k-1})\setminus\bar{A}_k.$$

此时,$\forall m>n$,有

$$d(x_m,x_n)<r_n<\frac{1}{n}\to 0,$$

故$\{x_n\}$是 X 中的 Cauchy 列,由完备性,$\exists x\in X$,使得 $x_n\to x$. 注意到

$$\{x_n,x_{n+1},\cdots\}\subset\bigcap_{k=1}^{n}\bar{B}_{r_k}(x_k),$$

而后者为一闭集,故有 $x\in\bigcap_{k=1}^{n}\bar{B}_{r_k}(x_k)$,再令 $n\to\infty$,得

$$x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bar{B}_{r_k}(x_k)\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}\bar{A}_k^c=(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bar{A}_k)^c=X^c=\varnothing,$$

这与 $x\in X$ 矛盾,故 X 是第二纲集. 证毕.

注 Baire 纲定理的结论仅对完备的距离空间成立,不完备的距离空间可以是第一纲集,例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是第一纲集.

推论 设 A 是完备距离空间 X 的非空子集,若 A 是第一纲集,则 A^c 是第二纲集.

证 若 A^c 是第一纲集,则

$$X=A\cup A^c$$

也是第一纲集,这与 X 是第二纲集矛盾,故 A^c 是第二纲集. 证毕.

由于在完备的距离空间中,第一纲集的余集是第二纲集,故 A 与 A^c 构成了有鲜明差异的集合对:若 A 中的元素是稀有的(第一纲集),则 A^c 中的元素就是普遍的(第二纲集). 下面我们来看 Baire 纲定理的两个应用范例.

例 2.6.4 在实数集 $\mathbf{R}$ 中,有理数集 $\mathbf{Q}$ 是第一纲集,无理数集 $\mathbf{Q}^c$ 是第二纲集,故在实数中,有理数是稀有的,无理数则是普遍的,尽管我们所熟知的无理数除了 π,e 以及$\sqrt{2}$之类的方根外寥寥无几.

例 2.6.5 在 $C([a,b])$中,至少在一点可微的连续函数全体是第一纲集,处处不可微的连续函数全体是第二纲集,故在$[a,b]$上的连续函数中,至少在一点可微是稀有的,处处不可微则是普遍的.

证 在完备距离空间$(C([a,b]),d_\infty)$中,令

$$A=\{f\in C([a,b]):f\text{ 至少在一点可微}\},$$

$$A_k=\left\{f\in C([a,b]):\exists t\in[a,b],\text{s.t.}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|\leqslant k,\forall\ |h|\leqslant\frac{1}{k}\right\},$$

式中,"s. t."表示"使得",则 $A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$. 下面证明$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$是第一纲集.

如果我们能证明 A_k 是闭集,且无内点,则

$$(\overline{A}_k)^\circ = A^\circ_k = \varnothing,$$

从而有 A_k 是疏集,结论自然可得.

先证 A_k 是闭集. $\forall f\in A_k'$, $\exists \{f_n\}\subset A_k$,使得

$$d_\infty(f_n,f)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

故由例 2.3.3,$\{f_n\}$一致收敛到 f. 由 $f_n\in A_k$,知$\exists t_n\in[a,b]$,使得

$$|f_n(t_n+h)-f_n(t_n)|\leqslant k\,|h|. \tag{2.6.1}$$

由于 $t_n\in[a,b]$,故$\{t_n\}$为有界数列,从而由列紧性定理,$\{t_n\}$有收敛子列,不妨设

$$t_n\to t_0,\quad t_0\in[a,b].$$

由$\{f_n\}$的一致收敛性,知$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}$, $\forall t\in[a,b]$,只要 $n>N_1$,就有

$$|f_n(t)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

由 f 的一致连续性,知$\exists\delta>0$,只要$|t'-t|<\delta$,就有

$$|f(t')-f(t)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

再由 $t_n\to t_0$,知$\exists N_2\in\mathbf{N}$,只要 $n>N_2$,就有$|t_n-t_0|<\delta$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 后,就有

$$|f_n(t_n+h)-f(t_0+h)|\leqslant|f_n(t_n+h)-f(t_n+h)|+|f(t_n+h)-f(t_0+h)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故有

$$f_n(t_n+h)\to f(t_0+h)\quad (n\to\infty).$$

在式(2.6.1)中令 $n\to\infty$,就有

$$|f(t_0+h)-f(t_0)|\leqslant k\,|h|,$$

此即 $f\in A_k$,从而有 $A_k'\subset A_k$,故 A_k 是闭集.

再证 A_k 无内点. 反证. 若 A_k 有内点 f_0,则$\exists\delta>0$,使得

$$B_\delta(f_0)\subset A_k.$$

构造如图 2-1 所示的锯齿形函数 g_0,使得它每一段斜率的绝对值大于 k,则

$$g_0\notin A_k,$$

但由于

$$d_\infty(f_0,g_0)=\max_{t\in[a,b]}|f_0(t)-g_0(t)|<\delta,$$

又有

$$g_0\in B_\delta(f_0)\subset A_k,$$

矛盾,故 A_k 无内点.

最后,再由$(C([a,b]),d_\infty)$的完备性,知处处不可微的连续函数全体是第二纲集.

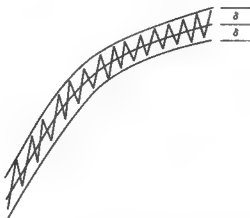


图 2-1 g_0 的构造

日常生活大量见到的分段光滑曲线，曾经使人们相信连续函数在几乎所有的点都是可导的，所以当 Weierstrass 于 1872 年构造出第一个用解析式表示出来的处处不可微的连续函数时，就一举震惊了整个柏林数学界. Baire 纲定理的神奇之处在于，它没有去构造一个个处处不可微的连续函数，却证明了此类函数不单存在，而且数量多得惊人，这充分体现了泛函分析所提供的抽象空间方法对解决实际问题的有效性.

习 题 2.6

1. 举例说明稠集的余集不一定是疏集.
2. 证明：$L^p([0,1])(1\leqslant p<\infty)$中的非负函数的全体是一个疏集.
3. 设 $X=\mathbf{N}$, $\forall n\in X$，证明：$\{n\}$为第二纲集.
4. 利用 Baire 纲定理证明：闭区间$[a,b]$是不可数集.

2.7 列紧性与紧性

1. 紧集的概念

在 $\mathbf{R}$ 中，任一有界点列都有收敛子列，闭区间的任一开覆盖必有有限子覆盖，因此我们也想在一般的距离空间找到类似于 $\mathbf{R}$ 中的有界集(如有界点列)、有界闭集(如闭区间)这样的具有良好性质的集合.

(1) 列紧性与紧性

定义 2.7.1 设 A 是距离空间 X 的子集，若 A 中的任一点列都有收敛子列，

则称 A 为列紧集；若 A 中的任一点列都有收敛于 A 的子列，则称 A 为紧集.

列紧集与紧集的区别在于：前者只要求极限属于大空间 X；后者则要求极限属于集合本身. 当 X 为列紧集时，X 必为紧集，此时称 X 为紧空间.

由定义不难看出：

1° 列紧集的子集是列紧集；

2° 紧集的闭子集是紧集.

例 2.7.1　任一距离空间中的有限集都是紧集.

证　设 A 是一有限集，则 A 中的任一点列中至少有一元素无限重复，若记此元素为 a，则

$$a,a,\cdots,a,\cdots$$

就是它的一个收敛子列，且其极限 $a\in A$，故 A 是紧集.

例 2.7.2　开区间 (a,b) 是 $\mathbf{R}$ 中的列紧集，但不是紧集，因为点列

$$x_n=a+\frac{1}{n}\to a\quad(n\to\infty),$$

而 $a\notin(a,b)$.

例 2.7.3　$\mathbf{R}^n$ 中的有界集是列紧集，有界闭集是紧集，但 $\mathbf{R}^n$ 不是紧空间，例如，$\mathbf{R}$ 中的点列 $\{n\}$ 无收敛子列.

注　一般距离空间中的有界集不一定是列紧集，例如 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的三角函数系 $\{\sin nt\}$ 是有界集：

$$d(\sin nt,0)=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nt\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nt}{2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi},$$

$\{\sin nt\}$ 落在 $L^2([-\pi,\pi])$ 中一半径为 $\sqrt{\pi}$ 的球面上，但 $\{\sin nt\}$ 不是列紧集，因为其中任意两个不同元素的距离

$$d(\sin mt,\sin nt)=\left(\int_{-\pi}^{\pi}(\sin mt-\sin nt)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2\pi},$$

故不存在收敛子列.

(2) 全有界性

为了进一步刻画列紧集，我们引入全有界集的概念.

定义 2.7.2　设 A 是距离空间 X 的子集，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ 及有限点集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}\subset X$，使得

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{N}B_\varepsilon(x_i),$$

即 A 有任意半径的有限开球覆盖，则称 A 是全有界的.

由定义不难看出：

1° 全有界集是有界集；

2° 全有界集的子集是全有界集.

注 在 $\mathbf{R}^n$ 中,全有界性与有界性是等价的,但在一般距离空间中有界集不一定是全有界集.

例如,由例 2.7.3 注,$L^2([-\pi,\pi])$中的三角函数系$\{\sin nt\}$是有界集,但由于其中任意两个不同元素的距离为$\sqrt{2\pi}$,故任一半径为 1 的开球最多包含$\{\sin nt\}$中的一个元素,从而$\{\sin nt\}$不存在半径为 1 的有限开球覆盖,故不是全有界的.

2. 紧集的性质

(1) 紧性、列紧性与全有界性的关系

定理 2.7.1 列紧集必是全有界的.

证 反证.设 A 是列紧集但不是全有界的,则$\exists\varepsilon>0$,使得 A 没有半径为ε的有限开球覆盖.此时,任取 $x_1\in A$,$\exists x_2\in A$,使得

$$d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon,$$

否则$\{B_\varepsilon(x_1)\}$就是 A 的一个半径为ε的有限开球覆盖.同理,$\exists x_3\in A$,使得

$$d(x_i,x_3)\geqslant\varepsilon\quad(i=1,2),$$

否则$\{B_\varepsilon(x_1),B_\varepsilon(x_2)\}$就是 A 的一个半径为ε的有限开球覆盖.如此,我们得到一个点列$\{x_n\}$,它的任意两个不同元素间的距离不小于ε,故没有收敛子列,这与 A 的列紧性矛盾,故 A 是全有界的.证毕.

定理 2.7.2 全有界集必是可分的.

证 设 A 是全有界集,则$\forall n\in\mathbf{N}$,存在 A 的半径为$\frac{1}{2n}$的有限开球覆盖

$$\bigcup_{i=1}^{k_n}B_{\frac{1}{2n}}(x_i^{(n)})\supset A,$$

取 $y_i^{(n)}\in B_{\frac{1}{2n}}(x_i^{(n)})\cap A$,则

$$\bigcup_{i=1}^{k_n}B_{\frac{1}{n}}(y_i^{(n)})\supset A,$$

令

$$B_n=\{y_1^{(n)},\cdots,y_{k_n}^{(n)}\},\qquad B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,$$

则 B 可数,且$\forall x\in A$,$\exists x_n\in B_n\subset B$,使得

$$d(x_n,x)<\frac{1}{n},$$

故有 $x_n\to x$,从而有

$$B\subset A\subset\bar{B},$$

故 A 可分.证毕.

综上所述,紧性、列紧性、全有界性、有界性、可分性之间有下列关系:

$$紧 \Rightarrow 列紧 \Rightarrow 全有界 \Rightarrow \begin{cases} 有界; \\ 可分. \end{cases}$$

(2) *有关紧性与列紧性的几个等价定理*

定理 2.7.3　对距离空间 X 的子集 A，下列条件等价：

① A 是紧集；

② A 是列紧的闭集；

③ A 的任一开覆盖必有有限子覆盖.

由定理 2.7.3 可以看出，紧集继承了 **R** 中闭区间的有限覆盖定理，就像列紧集继承了 **R** 中有界点列的列紧性定理一样.

定理 2.7.4　对完备距离空间 X 的子集 A，下列条件等价：

① A 是列紧集；

② A 是全有界集.

证　①⇒②：由定理 2.7.1 保证.

②⇒①：设 A 是全有界集，$\{x_n\}$是 A 中的任一点列，下证$\{x_n\}$必有收敛子列.

若$\{x_n\}$中只有有限个点，则结论显然成立；

若$\{x_n\}$中含有无限多个互不相同的点，记其全体为 A_0，则 $A_0 \subset A$. 由 A 的全有界性，知 A_0 也是全有界的，故 A_0 有半径为 1 的有限开球覆盖，其中必有一开球 B_1 含有 A_0 中无限多个点. 记

$$A_1 = A_0 \cap B_1,$$

则 A_1 也是全有界的，故 A_1 有半径为 1/2 的有限开球覆盖，其中必有一开球 B_2 含有 A_1 中无限多个点. 记

$$A_2 = A_1 \cap B_2,$$

仿照上述过程，可得一列无限集

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots,$$

其中每个集合的直径

$$\mathrm{diam} A_n \leqslant \mathrm{diam} B_n = \frac{2}{n}.$$

任取 $y_n \in A_n$，则$\{y_n\}$是$\{x_n\}$的一个子列，且当 $m,n>k$ 时，有

$$d(y_m, y_n) \leqslant \frac{2}{k} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

故$\{y_n\}$是 Cauchy 列，由 X 的完备性，知$\{y_n\}$收敛，即$\{x_n\}$有收敛子列$\{y_n\}$，从而有 A 列紧. 证毕.

定理 2.7.5　对距离空间 X，下列条件等价：

① X 是紧空间；

② X 是列紧空间；

③ X 是全有界的完备空间.

3. 紧性的判定

由于紧集就是闭的列紧集，故只需给出列紧性的判别法.

定理 2.7.6 在 n 维 Euclid 空间$(\mathbf{R}^n,d_2)$中，若 $A\subset\mathbf{R}^n$，则

1° A 是列紧集$\Leftrightarrow A$ 是有界集；

2° A 是紧集$\Leftrightarrow A$ 是有界闭集.

定理 2.7.7 (Arzela[①]-Ascoli[②] 定理) 在连续函数空间$(C([a,b]),d_\infty)$中，其任一子集 A 列紧的充分必要条件是：

1° A **一致有界**，即 $\exists M>0$，使对 $\forall x\in A, t\in[a,b]$，有

$$|x(t)|\leqslant M;$$

2° A **等度连续**，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对 $\forall x\in A, t_1,t_2\in[a,b]$，只要 $|t_1-t_2|<\delta$，就有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$

例 2.7.4 证明：

$$A=\left\{x_n;x_n(t)=\sin\frac{\pi}{n}t, n\in\mathbf{N}\right\}$$

是$(C([0,1]),d_\infty)$中的列紧集.

证 由于$|x_n(t)|\leqslant 1$，故 A 是一致有界的；对 $\forall\varepsilon>0$，取

$$\delta=\frac{\varepsilon}{\pi},$$

则对 $\forall x\in A, t_1,t_2\in[0,1]$，只要$|t_1-t_2|<\delta$，就有

$$\begin{aligned}|x_n(t_1)-x_n(t_2)| &= \left|\sin\frac{\pi}{n}t_1-\sin\frac{\pi}{n}t_2\right| \\ &= \left|2\sin\frac{\pi}{2n}(t_1-t_2)\cos\frac{\pi}{2n}(t_1+t_2)\right| \\ &\leqslant \left|2\sin\frac{\pi}{2n}(t_1-t_2)\right| \\ &\leqslant \frac{\pi}{n}|t_1-t_2|\leqslant\pi|t_1-t_2|<\varepsilon,\end{aligned}$$

故 A 是等度连续的，再由 Arzela-Ascoli 定理，A 为列紧集. 证毕.

4. 紧集上的连续映射

定理 2.7.8 若 f 是距离空间 X 到 Y 的连续映射，则 f 将 X 中的紧集映射为

① 阿尔泽拉(1847～1912 年)，意大利数学家.

② 阿斯科利(1843～1896 年)，意大利数学家.

Y 中的紧集.

证　设 A 为 X 的紧子集，$\{y_n\}$ 为 $f(A)$ 中的一个点列，则有 A 中的点列 $\{x_n\}$ 使得

$$y_n = f(x_n).$$

由 A 的紧性，知存在 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 A 中的一点 x_0. 此时，

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \in f(A),$$

故 $f(A)$ 是 Y 中的紧集. 证毕.

由定理的证明过程不难看出，连续映射还将列紧集映为列紧集.

此外，闭区间上连续函数的许多性质都可以推广到一般距离空间中的紧集上. 例如：

定理 2.7.9　设 X 是距离空间，f 是 X 中的紧集 A 上的连续泛函，则

1° f 在 A 上有界且在 A 上达到它的上、下确界；

2° f 在 A 上一致连续.

习　题　2.7

1. 证明：$\mathbf{R}^n$ 中的有界集是列紧集.
2. 设 A,B 是距离空间 X 的紧子集，证明：$\exists x_0 \in A, y_0 \in B$，使得
$$d(A,B) = d(x_0, y_0).$$
3. 设 A,B 是距离空间 X 的紧子集，证明：
$$A \cap B = \varnothing \iff d(A,B) > 0.$$
4. 证明：若距离空间 X 是紧的，则 X 是完备的.

2.8　压缩映射原理及其应用

1. 压缩映射与不动点

计算方程的近似解，始终是数学应用中的基本课题. 关于多项式方程根的近似计算，最常用的技巧就是逐次迭代法，Banach 于 1922 年将其用距离空间中压缩映射的不动点概念提炼成一般方法，这就是著名的 Banach 不动点定理或压缩映射原理，目前已成为非线性泛函分析的一个重要内容.

定义 2.8.1　设 (X,d) 为距离空间，$T: X \to X$ 是 X 到自身的一个自映射，若存在常数 $\theta(0<\theta<1)$，使对 $\forall x, y \in X$，有

$$d(Tx, Ty) \leqslant \theta d(x,y),$$

则称 T 为 X 上的**压缩映射**.

由定义可以看出，$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon/\theta$，则当 $d(x,y) < \delta$ 时，就有

$$d(Tx, Ty) \leqslant \theta d(x,y) < \varepsilon,$$

故压缩映射是 X 上的连续映射.

定义 2.8.2 对 X 上的自映射 T,若 $\exists x^*\in X$,使得

$$Tx^* = x^*,$$

则称 x^* 为 T 的一个不动点.

对一般的方程 $f(x)=0$,若令 $T=f+I$,其中 I 为恒等映射,则有

$$Tx = x,$$

从而可将方程求解的问题转化为求 T 的不动点问题.

2. 压缩映射原理

定理 2.8.1(压缩映射原理) 设 X 是完备的距离空间,$T:X\to X$ 是一压缩映射,则 T 在 X 中有唯一的不动点.

证 存在性:任取一个初始点 $x_0\in X$,作迭代序列

$$x_1 = Tx_0,\quad x_2 = Tx_1,\quad \cdots,\quad x_{n+1} = Tx_n,\quad \cdots,$$

则有

$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1},Tx_n)\leqslant \theta d(x_{n-1},x_n)\\ &\leqslant \theta^2 d(x_{n-2},x_{n-1})\leqslant \theta^n d(x_0,x_1),\end{aligned}$$

于是对正整数 p,有

$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n+p}) &\leqslant d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+p-1},x_{n+p})\\ &\leqslant (\theta^n+\theta^{n+1}+\cdots+\theta^{n+p-1})d(x_0,x_1) \qquad (2.8.1)\\ &< (\theta^n+\theta^{n+1}+\cdots)d(x_0,x_1)\\ &= \frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,x_1)\to 0\quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列,由 X 的完备性,知 $\exists x^*\in X$,使得

$$x_n\to x^*\quad (n\to\infty).$$

由于压缩映射是连续映射,故

$$Tx^* = T\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}Tx_n = \lim_{n\to\infty}x_{n+1} = x^*,$$

从而有 x^* 为 T 的一个不动点.

唯一性:设 y^* 为 T 的另一个不动点,则有

$$d(x^*,y^*) = d(Tx^*,Ty^*)\leqslant \theta d(x^*,y^*),$$

但 $0<\theta<1$,故

$$d(x^*,y^*) = 0,$$

$y^*=x^*$. 证毕.

注 压缩映射原理中的完备性条件是不可少的,例如在不完备距离空间 $X=$

$(0,1]$中，自映射

$$Tx=\frac{x}{2}$$

是压缩映射但没有不动点.

在定理的证明过程中，我们得到一个估计式(2.8.1)：

$$d(x_n,x_{n+p})\leqslant\frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,Tx_0),$$

令 $p\to\infty$，即得

$$d(x_n,x^*)\leqslant\frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,Tx_0),\tag{2.8.2}$$

这就是用迭代法求不动点时的收敛速度的估计式.

作为压缩映射原理的一个推广，我们有：

定理 2.8.2　设 A 为完备距离空间 X 中的非空闭子集，

$$T:A\to A.$$

若 $\exists n\in\mathbf{N}$，使得 T^n 为 A 上的压缩映射，则 T 在 A 中有唯一的不动点.

证　存在性：由于 A 是闭集，故 A 为 X 的完备子空间，在 A 上压缩映射原理成立，从而知 T^n 在 A 上有不动点 x^*. 此时，

$$T^n(Tx^*)=T(T^nx^*)=Tx^*,$$

即 Tx^* 也为 T^n 在 A 上的不动点，故由不动点的唯一性，得

$$Tx^*=x^*,$$

即 x^* 是 T 的不动点.

唯一性：设 y^* 为 T 的另一不动点，则它也是 T^n 的不动点，由 T^n 的不动点的唯一性，知 $y^*=x^*$. 证毕.

3. 压缩映射原理的应用

(1) *求方程的近似解*

定理 2.8.3　设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是可微映射，且

$$|f'(x)|\leqslant\theta<1,$$

则方程 $f(x)=x$ 有唯一解.

证　由 Lagrange 中值定理，有

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)(x-y)|\leqslant\theta|x-y|,$$

故 f 是完备距离空间 $\mathbf{R}$ 上的压缩映射，故由压缩映射原理，方程 $f(x)=x$ 有唯一解.

例 2.8.1　求方程 $x^5+x-1=0$ 的根.

解　令 $g(x)=x^5+x-1$，则 f 单增，且

$$g(0.5) = -0.46875, \quad g(1) = 1,$$

故方程有唯一根且根在[0.5,1]内. 原方程可以写成 $1-x^5=x$,问题就转化为求

$$f(x) = 1 - x^5$$

的不动点问题,但由于 g 不是压缩映射,故不能使用压缩映射原理. 实际上,原方程等价于

$$(1-\lambda)x + \lambda(1-x^5) = x,$$

取 $\lambda=\frac{1}{4}$,令

$$f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}(1-x^5),$$

则 f 在[0.5,1]上满足

$$|f'(x)| = \left|\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\times 4\right| \leqslant \frac{3}{4},$$

故 f 是[0.5,1]上的压缩映射.

取 $x_0=0.75$,作迭代序列 $x_{n+1}=f(x_n)$,则有

$$\begin{aligned} &x_1 = 0.7521, \quad x_2 = 0.7533, \quad x_3 = 0.7540, \\ &x_4 = 0.7544, \quad x_5 = 0.7546, \quad x_6 = 0.7547, \\ &x_7 = 0.7548, \quad x_8 = 0.7548, \quad \cdots, \end{aligned}$$

若取近似解为 $x_8=0.7548$,则由式(2.8.2),其误差

$$|0.7548 - x^*| \leqslant \frac{(0.75)^8}{1-0.75}|0.7521 - 0.75| = 0.0008.$$

(2) 证明方程解的存在性与唯一性

定理 2.8.4(常微分方程初值问题解的存在性与唯一性定理) 对初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x\Big|_{t=t_0} = x_0, \end{cases} \tag{2.8.3}$$

其中 $f(x,t)$ 在平面上连续且关于 x 满足 Lipschitz① 条件

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leqslant K|x-y|,$$

则定解问题(2.8.3)有唯一解.

证 为了利用压缩映射原理,我们先将问题局限在以 t_0 为中心的某一闭区间 $[t_0-\delta, t_0+\delta]$内. 由于定解问题(2.8.3)等价于方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t),t)dt$$

① 利普希茨(1832~1903 年),德国数学家.

有连续解,故在完备距离空间$(C([t_0-\delta,t_0+\delta]),d_\infty)$中,定义

$$Tx = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t),t)\mathrm{d}t,$$

则原方程的解就是 T 的不动点. 由于

$$\begin{aligned}
d_\infty(Tx,Ty) &= \max_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]}\left|\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(y(s),s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \max_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]}\left|\int_{t_0}^{t} |f(x(s),s)-f(y(s),s)|\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \max_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]}\left|\int_{t_0}^{t} K\,|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant K \max_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]}\left|\int_{t_0}^{t} \max_{s\in[t_0-\delta,t_0+\delta]}|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant K\delta \max_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]}|x(t)-y(t)| \\
&\leqslant K\delta d_\infty(x,y),
\end{aligned}$$

取 $\delta<\frac{1}{K}$,则 T 是$(C([t_0-\delta,t_0+\delta]),d_\infty)$上的压缩映射,$T$ 存在唯一的不动点

$$x^*(t) \in C([t_0-\delta,t_0+\delta]),$$

此即定解问题在$[t_0-\delta,t_0+\delta]$上的唯一解.

同理,在完备距离空间$(C([t_0,t_0+2\delta]),d_\infty)$中,方程在初值

$$x|_{t=t_0+\delta} = x^*(t_0+\delta)$$

下也有唯一解 $x^{**}(t)$,这个解在区间$[t_0,t_0+\delta]$上与 $x^*(t)$相同,故解延拓到了$[t_0-\delta,t_0+2\delta]$. 依此类推,解可以延拓到整个实轴上. 证毕.

例 2.8.2　考察第二类 Fredholm① 积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

其中 λ 为参数,$f\in L^2([a,b])$,积分核

$$K(t,s) \in L^2([a,b]\times[a,b]),$$

证明:当$|\lambda|$充分小时,方程有唯一解 $x\in L^2([a,b])$.

证　$\forall x\in L^2([a,b])$,令

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

则由 Hölder 不等式,

$$\int_a^b \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \left[\int_a^b K^2(t,s)\mathrm{d}s\int_a^b x^2(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

---

① 弗雷德霍姆(1866～1927 年),瑞典数学家,积分方程一般理论的创始人之一.

$$\leqslant\int_a^b x^2(s)\mathrm{d}s\cdot\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t<\infty$$

知 $Tx\in L^2([a,b])$，故 T 是 $L^2([a,b])$ 到自身的映射，则方程的解就是 T 的不动点. 由于

$$\begin{aligned}d_2(Tx,Ty)&=\left[\int_a^b|(Tx)(t)-(Ty)(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\left[\int_a^b\left|\lambda\int_a^b K(t,s)\{x(s)-y(s)\}\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant|\lambda|\left[\int_a^b\left\{\int_a^b K^2(t,s)\mathrm{d}s\int_a^b|x(s)-y(s)|^2\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\\&=|\lambda|\left[\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}d(x,y),\end{aligned}$$

取 $|\lambda|$ 充分小，使得

$$|\lambda|\left[\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}<1,$$

则 T 为压缩映射，故存在唯一的不动点 $x^*\in L^2([a,b])$，即积分方程有唯一的平方可积解，且 x^* 是迭代序列

$$x_n(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)x_{n-1}(s)\mathrm{d}s$$

的极限，其中 $x_0(t)$ 可取 $L^2([a,b])$ 中的任意函数.

习 题 2.8

1. 设 $X=[1,+\infty)$ 是 $\mathbf{R}$ 的子空间，$T:X\to X$ 定义为

$$Tx=\frac{x}{2}+\frac{1}{x},$$

证明：T 是压缩映射并求出 T 的不动点.

2. 已知 $\varphi\in C([0,1])$，证明函数方程

$$x(t)=\frac{2}{3}\sin x(t)+\varphi(t)$$

在 $[0,1]$ 上存在唯一的连续解.

3. 用迭代法求方程

$$x^3+4x-2=0$$

的根，并估计近似解的误差.

4. 考察 Volterra① 积分方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $f\in C([a,b])$，$K(t,s)\in C([a,b]\times[a,b])$，证明：方程有唯一解 $x\in C([a,b])$.

---

① 沃尔泰拉(1860～1940年)，意大利数学家，积分方程一般理论的创始人之一.

第 3 章　赋范空间与 Banach 空间

距离空间推广了 Euclid 空间的分析性质和拓扑性质，在一般集合上建立了距离、极限、开集、闭集等概念，但没有推广 Euclid 空间的代数性质(例如，向量的加法与数乘)，使得它在处理从工程技术中提炼出来的大量线性与非线性问题时显得力不从心. 本章从线性空间入手，介绍一类同时具有拓扑结构和代数结构的空间——赋范线性空间，并重点讨论完备的赋范空间——Banach 空间的特性.

3.1　线 性 空 间

1. 线性空间的概念

(1) 线性空间

定义 3.1.1　设 X 是一个非空集合，$\mathbf{K}$ 是数域(实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$)，X 称为数域 $\mathbf{K}$ 上的**线性空间**，若 $\forall x, y\in X$，都有唯一的一个元素 $z\in X$ 与之对应，称为 x 与 y 的和，记作

$$z = x + y;$$

$\forall x\in X, \alpha\in \mathbf{K}$，都有唯一的一个元素 $u\in X$ 与之对应，称为 α 与 x 的积，记作

$$u = \alpha x.$$

且 $\forall x, y, z\in X, \alpha, \beta\in \mathbf{K}$，上述的加法与数乘运算(称为**线性运算**)满足下列 8 条运算规律：

1° $x+y=y+x$;

2° $(x+y)+z=x+(y+z)$;

3° 在 X 中存在**零元素** θ(在不引起混淆的情况下，可径记为 0)，使得 $\forall x\in X$，

$$\theta + x = x;$$

4° $\forall x\in X$，存在**负元素** $-x\in X$，使得

$$x + (-x) = \theta;$$

5° $1\cdot x=x$;

6° $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

7° $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

8° $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 时，称 X 为实线性空间；当 $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ 时，称 X 为复线性空间.

注 由于线性空间中的加法与数乘运算是 n 维向量空间中的加法与数乘运算的直接推广，故线性空间也称为向量空间，其中的元素也称为向量(或点).

例 3.1.1 $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^\infty, l^p, l$ 以及收敛数列空间

$$c = \{(x_1, x_2, \cdots) : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ 存在}\}$$

按照向量的加法与数乘运算都是线性空间.

例 3.1.2 设 E 为 $\mathbf{R}$ 中的可测集，则 $C(E), C^k(E), L^p(E)$ 以及 E 上几乎处处有界可测函数空间

$$L^\infty(E) = \{f : f \text{ 在 } E \text{ 上可测}, \exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, \text{s.t.} \sup_{x\in E\setminus E_0} |f(x)| < \infty\}$$

按照函数的加法与数乘运算都是线性空间.

(2) 线性子空间

定义 3.1.2 设 M 是线性空间 X 的非空子集，若 M 对 X 上的线性运算封闭，即 $\forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbf{K}$，都有

$$\alpha x + \beta y \in M,$$

则称 M 是 X 的**线性子空间**，简称**子空间**.

注 若 $M \neq X$，则称 M 是 X 的**真子空间**.

定义 3.1.3 设 A 是线性空间 X 的非空子集，M 是 X 的子空间，$A \subset M$，且对 X 的任一包含 A 的子空间 P，都有

$$M \subset P,$$

则称 M 为由 A 张成的子空间或 A 的**线性包**，记作 $\text{span}A$.

命题 3.1.1 设 A 是线性空间 X 的非空子集，则

$$\text{span}A = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \alpha_k \in \mathbf{K}, x_k \in A, n \in \mathbf{N}\}.$$

证 记等式右侧为 M，则 $\forall x, y \in M, \exists x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \in A$，使得

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \qquad y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{n+k} x_{n+k}.$$

$\forall \alpha \in \mathbf{K}$，由

$$x + y = \sum_{k=1}^{n+m} \alpha_k x_k \in M,$$

$$\alpha x = \sum_{k=1}^{n} \alpha \alpha_k x_k \in M,$$

知 M 对线性运算封闭，故 M 为 X 的线性子空间；又 X 的包含 A 的任一线性子空间均须包含形如

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbf{K}, \quad x_k \in A, \quad n \in \mathbf{N}$$

的向量,故 M 是包含 A 的最小线性子空间. 证毕.

(3) 直和

定义 3.1.4 设 A,B 为线性空间 X 的两个子集,称集合

$$\{a+b: a\in A, b\in B\}$$

为 A 与 B 的和,记作 $A+B$.

定义 3.1.5 设 A,B 是线性空间 X 的子空间,若 $\forall x\in X$,有唯一分解

$$x = a+b,\quad a\in A,\quad b\in B,$$

则称 X 为 A 与 B 的直和,记作 $X=A\oplus B$.

定理 3.1.1 设 A,B 是线性空间 X 的子空间,$X=A+B$,则

$$X = A\oplus B \iff A\cap B = \{0\}.$$

证 必要性:$\forall x\in A\cap B$,由 $0\in A\cap B$,得

$$x = x+0 = 0+x,$$

再由分解的唯一性,得 $x=0$,故 $A\cap B=\{0\}$.

充分性:$\forall x\in X$,若有

$$x = a_1+b_1 = a_2+b_2,\quad a_1,a_2\in A,\quad b_1,b_2\in B,$$

则有

$$a_1-a_2 = b_2-b_1 \in A\cap B = \{0\},$$

从而有 $a_1-a_2=b_2-b_1=0$,即

$$a_1 = a_2,\quad b_1 = b_2,$$

故由分解的唯一性得 $X=A\oplus B$,证毕.

(4) 凸集

定义 3.1.6 设 A 是线性空间 X 的子集,若 $\forall x,y\in A$,以 x,y 为端点的线段

$$L(x,y) = \{\lambda x+(1-\lambda)y: 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}\subset A,$$

则称 A 为**凸集**.

例 3.1.3 X 的子空间以及 X 中的开球与闭球都是凸集.

2. 线性空间的维数

(1) 线性相关与线性无关

定义 3.1.7 设 X 为线性空间,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$. 若存在不全为 0 的数 a_1,$a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{K}$,使得

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n = \theta,$$

则称向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是**线性相关**的,否则称为**线性无关**.

定义 3.1.8 设 $x\in X$,若 $\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{K}$,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$,使得

$$x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

则称 x 可由向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ **线性表示**.

(2) 维数与基

定义 3.1.9 设 X 为线性空间,若在 X 中存在 n 个线性无关的向量,使得 X 中任一向量可由这 n 个向量线性表示,则称其为 X 的一个**基**,称 n 为 X 的**维数**(dimension),记作 $\dim X=n$.

定义 3.1.10 设 X 为线性空间,若 $\forall n\in\mathbf{N}$,在 X 中存在 n 个线性无关的向量,则称 X 是**无限维**的,记作

$$\dim X=\infty.$$

例 3.1.4 l^p 是无限维的.

证 $\forall n\in\mathbf{N}$,令

$$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},1,0,\cdots),$$

则 $e_n\in l^p$,且由

$$a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n=\theta,$$

可得

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n,0,\cdots)=(0,0,\cdots0,0,\cdots),$$

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=0,$$

从而有 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是线性无关的. 再由 n 的任意性,知 l^p 是无限维的.

例 3.1.5 $C^k([a,b])$ 是无限维的.

证 $\forall n\in\mathbf{N}$,令

$$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}=0,$$

得 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$,故

$$\{1,x,x^2,\cdots x^{n-1}\}\subset C^k([a,b])$$

是线性无关的. 再由 n 的任意性,知 $C^k([a,b])$ 是无限维的.

3. 线性空间的同构

(1) 线性映射

定义 3.1.11 设 X,Y 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,$T:X\to Y$,若 $\forall x,y\in X$,$\alpha,\beta\in\mathbf{K}$,有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$

则称 T 为**线性映射**(或**线性算子**、**线性变换**).

(2) 线性同构

定义 3.1.12　设 X,Y 是线性空间，$T:X\to Y$ 是一一对应的线性映射，则称 T 为 X 到 Y 的**线性同构映射**，并称 X 与 Y **线性同构**.

线性同构也是一种等价关系.

例 3.1.6　数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 维线性空间 X 与 $\mathbf{K}^n$ 线性同构.

证　设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 X 的一个基，则 $\forall x\in X$，$\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{K}$，使得

$$x=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n.$$

令 $T:X\to\mathbf{K}^n$ 为

$$Tx=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

则 T 为 X 到 $\mathbf{K}^n$ 的线性同构映射，故 X 与 $\mathbf{K}^n$ 线性同构.

习　题　3.1

1. 证明：线性空间中的零元素 θ 是唯一的.

2. 对极限为 0 的数列空间

$$c_0=\{(x_1,x_2,\cdots):\lim_{n\to\infty}x_n=0\},$$

按自然方式定义加法与数乘：

$$(x_1,x_2,\cdots)+(y_1,y_2,\cdots)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots),$$
$$\alpha(x_1,x_2,\cdots)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots).$$

证明：c_0 是线性空间.

3. 设 $M_\alpha(\alpha\in I)$ 是线性空间 X 的线性子空间，证明：

$$\bigcap_{\alpha\in I}M_\alpha$$

也是 X 的线性子空间.

4. 证明：$L^p([a,b])$ 是无限维的.

3.2　赋范空间

1. 赋范空间的概念

定义 3.2.1　设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，若 $\forall x\in X$，都有一个实数 $\|x\|$ 与之对应，使得 $\forall x,y\in X,\alpha\in\mathbf{K}$，下列范数公理成立：

1° 正定性

$$\|x\|\geqslant 0,\quad \|x\|=0\Leftrightarrow x=0;$$

2° 绝对齐次性

$$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|;$$

3° 三角不等式

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

则称 $\|x\|$ 为 x 的**范数**，X 为 $\mathbf{K}$ 上的**赋范空间**，记作 $(X, \|\cdot\|)$.

注 当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 时，称 X 为实赋范空间；当 $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ 时，称 X 为复赋范空间.

命题 3.2.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间，则 $\forall x, y \in X$，有

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x-y\|.$$

证 由三角不等式，有

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|,$$

$$\|y\| = \|y-x+x\| \leqslant \|x-y\| + \|x\|,$$

移项，得

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|,$$

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x-y\|,$$

合之，得

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x-y\|.$$

证毕.

例 3.2.1 $\forall x \in \mathbf{R}$，定义

$$\|x\| = |x|,$$

则 $(\mathbf{R}, \|\cdot\|)$ 是赋范空间.

例 3.2.2 $\forall x=(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$，定义

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|,$$

则 $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_p)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 均为赋范空间.

注 $\|\cdot\|_2$ 称为 **Euclid 范数**.

例 3.2.3 对 p 次幂可和数列空间 l^p，定义

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

则 $(l^p, \|\cdot\|_p)$ 为赋范空间.

证 $\forall x=(x_1, x_2, \cdots), y=(y_1, y_2, \cdots) \in l^p, \alpha \in \mathbf{K}$，按自然方式定义加法和数乘

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots),$$

则 l^p 是个线性空间. 显然，$\|\cdot\|$ 满足范数公理的前两条，下证三角不等式.

由 Minkowski 不等式，有

$$\|x+y\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\|x\|_p+\|y\|_p,$$

故 $\|\cdot\|$ 是范数，l^p 是赋范空间.

例 3.2.4　对 Ω 上的有界函数空间

$$B(\Omega)=\{u:\sup_{t\in\Omega}|u(t)|<\infty\},$$

定义

$$\|u\|_0=\sup_{t\in\Omega}|u(t)|,$$

则 $\|\cdot\|_0$ 是 Ω 上的范数(称为上确界范数)，$(B(\Omega),\|\cdot\|_0)$ 为赋范空间.

2. 赋范空间中的距离与极限

(1) 由范数诱导的距离

对赋范空间$(X,\|\cdot\|)$，若定义

$$d(x,y)=\|x-y\|,$$

则 d 满足距离的三个条件，故在距离 d 下，(X,d) 成为一个距离空间.

那么，对于定义了线性运算的距离空间(X,d)，能否定义

$$\|x\|=d(x,\theta)$$

而使得 X 成为赋范空间呢？回答是否定的.

例 3.2.5　数列空间 $\mathbf{R}^{\infty}$ 按距离

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k-y_k|}{2^k(1+|x_k-y_k|)}$$

不能扩展为赋范空间.

证　记 $\|x\|=d(x,\theta)$，其中 θ 为 $\mathbf{R}^{\infty}$ 中的零元素 $(0,0,\cdots)$，取

$$x=(1,1,\cdots),$$

则

$$\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k(1+1)}=\frac{1}{2},$$

$$\|2x\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2^k(1+2)}=\frac{2}{3},$$

从而有

$$\|2x\|\neq 2\|x\|,$$

即 $\|x\|$ 不满足绝对齐次性，故 $\|x\|$ 不是范数.

(2) 依范数收敛

在由范数诱导的距离下，赋范空间中的点列收敛 $x_n\to x$ 等价于

$$d(x_n,x)=\|x_n-x\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

故也称$\{x_n\}$依范数收敛于x.

下面介绍两个连续性定理.

定理 3.2.1 范数$\|x\|$是x的连续泛函.

证 设在X中有$x_n\to x$,则由命题 3.2.1,有

$$|\,\|x_n\|-\|x\|\,|\leqslant\|x_n-x\|\to 0,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|.$$

证毕.

定理 3.2.2 赋范空间中的加法与数乘运算是连续的.

证 设在X中有$x_n\to x,y_n\to y$,则由

$$\|x_n+y_n-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0$$

知当$n\to\infty$时,$x_n+y_n\to x+y$;

设数列$\alpha_n\to\alpha$,则$\{\alpha_n\}$有界,从而由

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n-\alpha x\|&\leqslant\|\alpha_n x_n-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha x\|\\&=|\alpha_n|\,\|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha|\,\|x\|\to 0\end{aligned}$$

知当$n\to\infty$时,$\alpha_n x_n\to\alpha x$. 证毕.

(3) 积空间与积范数

定义 3.2.2 设X,Y是数域$\mathbf{K}$上的线性空间,则$\forall x_i\in X,y_i\in Y(i=1,2)$,$\alpha,\beta\in\mathbf{K}$,直积集$X\times Y$在线性运算

$$\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)=(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2)$$

下成为$\mathbf{K}$上的线性空间,称为X与Y的**积空间**.

设$(X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$是赋范空间,则积空间$X\times Y$在范数

$$\|(x,y)\|_p=(\|x\|_X^p+\|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|(x,y)\|_\infty=\max\{\|x\|_X,\|y\|_Y\}$$

下均成为赋范空间,且

$$\begin{aligned}\|(x_n,y_n)\|_p\to 0\quad&\Leftrightarrow\quad\|x_n\|_X\to 0,\|y_n\|_Y\to 0\\&\Leftrightarrow\quad x_n\to 0,y_n\to 0\end{aligned}$$

$(1\leqslant p\leqslant\infty)$,即它们导出的收敛都是按坐标收敛,故通称为**积范数**.

在未加说明时,在积空间中总使用积范数.

3. 赋范空间中的级数与 Schauder 基

定义 3.2.3 设$\{x_n\}$是赋范空间$(X,\|\cdot\|)$中的点列,若它的前n项和

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

收敛,则称无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛;若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|$$

收敛,则称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对收敛.

定义 3.2.4　设 X 是一个无限维的赋范空间,点列 $\{e_n\} \subset X$. 若 $\forall x \in X$,存在唯一的数列 $\{\alpha_n\} \subset \mathbf{R}$,使得

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

则称 $\{e_n\}$ 为 X 的一个 Schauder① 基.

例 3.2.6　对 p 次幂可和数列空间 l^p,令

$$e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1 个}, 1, 0, \cdots),$$

则 $\{e_n\}$ 为 l^p 的一个 Schauder 基.

证　$\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$,由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$,知

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p = 0,$$

故当 $n \to \infty$ 时,有

$$\begin{aligned} \| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \|_p &= \| (0, \cdots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots) \|_p \\ &= \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \to 0, \end{aligned}$$

从而有

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

下证系数的唯一性.

设 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k e_k$,则 $\forall i \in \mathbf{N}$,当 $n > i$ 时,有

$$\begin{aligned} |y_i - x_i| &\leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \| (y_1 - x_1, \cdots, y_n - x_n, 0, \cdots) \|_p \end{aligned}$$

① 绍德尔(1898~1943 年),波兰数学家.

$$= \| \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)e_k \|_p = \| \sum_{k=1}^{n} y_k e_k - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \|_p,$$

而由范数的连续性,

$$\lim_{n\to\infty} \| \sum_{k=1}^{n} y_k e_k - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \| = \| \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k - \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \|$$
$$= \| x - x \| = 0,$$

故有 $y_i = x_i (i=1,2,\cdots)$. 证毕.

定理 3.2.3 具有 Schauder 基的赋范空间 X 是可分的.

证 设 $\{e_n\}$ 为 X 的 Schauder 基,记

$$A = \{ \sum_{k=1}^{n} r_k e_k : r_k \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N} \},$$

则 A 是可数集,下证 A 在 X 中的稠密.

$\forall x \in X, \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots \in \mathbf{K}$,使得

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

$\forall \varepsilon > 0$,由 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ 的收敛性,知 $\exists n \in \mathbf{N}$,使得

$$\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k e_k \| < \frac{\varepsilon}{2};$$

由 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中的稠密性,知 $\exists r_k \in \mathbf{Q} (k=1,2,\cdots,n)$,使得

$$|\alpha_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1} \| e_k \|}.$$

令

$$a = \sum_{k=1}^{n} r_k e_k,$$

则 $a \in A$,且

$$\| x - a \| = \| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^{n} r_k e_k \|$$
$$\leqslant \| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - r_k) e_k \| + \| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k e_k \|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - r_k| \, \| e_k \| + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 A 在 X 中的稠密. 证毕.

习　题　3.2

1. $\forall f\in C^1([a,b])$,令

$$\|f\|=\left[\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},$$

证明:$\|\cdot\|$ 是 $C^1([a,b])$ 上的范数.

2. 设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,d 为其上的距离,且 $\forall x,y,z\in X,\alpha\in\mathbf{K}$,满足

① 平移不变性:$d(x+z,y+z)=d(x,y)$;

② 相似性:$d(\alpha x,\alpha y)=\alpha d(x,y)$.

令

$$\|x\|=d(x,0),$$

证明:$(X,\|\cdot\|)$为赋范空间.

3. 设$(X,\|\cdot\|)$为赋范空间,对于 $x,y\in X$,定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1+\|x-y\|, & x\neq y,\end{cases}$$

证明:d 是 X 上的一个距离,但不是由范数诱导的.

4. 设 X 为赋范空间,$\{x_n\}\subset X$,证明:若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛,则

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|.$$

3.3　Banach 空间

1. Banach 空间的概念

第 2 章我们介绍了完备距离空间的概念,其中的任一 Cauchy 列均收敛. 赋范空间作为一类特殊的距离空间,同样可以讨论它的完备性,只是这里的距离是由范数诱导的距离. 在范数的语言下,点列$\{x_n\}$为 Cauchy 列的定义可改写为

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$,使当 $m,n>N$ 时,有

$$\|x_m-x_n\|<\varepsilon.$$

定义 3.3.1　完备的赋范空间称为 **Banach 空间**.

例 3.3.1　$\mathbf{K}^n$ 按范数

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

均是 Banach 空间.

例 3.3.2　p 次幂可和数列空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$按范数

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

是 Banach 空间.

证 设$\{x^{(n)}\}$是 l^p 中的 Cauchy 列,

$$x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots),$$

则$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}$,使当 $m,n>N$ 后,有

$$\|x^{(n)}-x^{(m)}\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon. \tag{3.3.1}$$

固定 k,当 $m,n>N$ 后,有

$$|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|\leqslant\|x^{(n)}-x^{(m)}\|_p<\varepsilon,$$

故$\{x_k^{(n)}\}$是 $\mathbf{K}$ 中的 Cauchy 列,由 $\mathbf{K}$ 的完备性,知$\exists x_k\in\mathbf{K}$,使得

$$x_k^{(n)}\to x_k\quad(n\to\infty).$$

记 $x=(x_1,x_2,\cdots)$,由式(3.3.1),$\forall l\in\mathbf{N}$,当 $m,n>N$ 后,有

$$\sum_{k=1}^{l}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^p<\varepsilon^p,$$

令 $m\to\infty$,知当 $n>N$ 后,有

$$\sum_{k=1}^{l}|x_k^{(n)}-x_k|^p\leqslant\varepsilon^p,$$

再令 $l\to\infty$,有

$$\|x^{(n)}-x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon, \tag{3.3.2}$$

从而有

$$x^{(n)}\to x\quad(n\to\infty).$$

又从式(3.3.2)可以看出,

$$x^{(n)}-x\in l^p,$$

故由 l^p 对线性运算的封闭性,得

$$x=x^{(n)}-(x^{(n)}-x)\in l^p,$$

从而知 l^p 中的 Cauchy 列均收敛,故 l^p 是 Banach 空间.

例 3.3.3 有界数列空间 l^∞ 按范数

$$\|x\|_\infty=\sup_{i\in\mathbf{N}}|x_i|$$

是 Banach 空间.

例 3.3.4 连续函数空间 $C([a,b])$ 按范数

$$\|x\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|$$

是 Banach 空间.

例 3.3.5 k 阶连续可导的函数空间 $C^k([a,b])$ 按范数

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t)|,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{0\leqslant i\leqslant k}\{\max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t)|\}$$

均是 Banach 空间.

例 3.3.6　Ω 上的有界函数空间 $B(\Omega)$ 按范数

$$\|u\|_0 = \sup_{t\in\Omega} |u(t)|$$

是 Banach 空间.

证　设 $\{u_n\}$ 是 $B(\Omega)$ 中的 Cauchy 列，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使当 $m,n>N$ 后，有

$$\|u_n - u_m\|_0 = \sup_{t\in\Omega} |u_n(t) - u_m(t)| < \varepsilon.$$

此时，给定 t，有

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leqslant \sup_{t\in\Omega} |u_n(t) - u_m(t)| < \varepsilon, \tag{3.3.3}$$

故 $\{u_n(t)\}$ 是 $\mathbf{K}$ 中的一个 Cauchy 列，由 $\mathbf{K}$ 的完备性，知 $\exists u(t)$，使得

$$u_n(t) \to u(t).$$

在式(3.3.3)中令 $m\to\infty$，有

$$|u_n(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon,$$

再由 t 的任意性，有

$$\|u_n - u\|_0 = \sup_{t\in\Omega} |u_n(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon,$$

从而有 $u_n\to u$. 最后，由

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\Omega} |u(x)| &\leqslant \sup_{x\in\Omega} |u(x) - u_{N+1}(x)| + \sup_{x\in\Omega} |u_{N+1}(x)| \\ &\leqslant \varepsilon + \|u_{N+1}\|_0 < \infty,\end{aligned}$$

知 $u\in B(\Omega)$，$B(\Omega)$ 具有完备性.

例 3.3.7　p 次幂可积函数空间 $L^p([a,b])$ 按范数

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

是 Banach 空间.

2. Banach 空间的性质

在实数集 $\mathbf{R}$ 中，若数项级数是绝对收敛的，则它本身也是收敛的. 下面的定理将指出，这是 Banach 空间的一个本质特性.

定理 3.3.1　设 X 是赋范空间，则 X 是 Banach 空间的充分必要条件如下：

$$\forall \{x_n\}\subset X, \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ 收敛} \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ 收敛}.$$

证　必要性：设 X 是 Banach 空间，若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ 收敛，则由

$$\| S_{n+p} - S_n \| = \| x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p} \|$$
$$\leqslant \| x_{n+1} \| + \| x_{n+2} \| + \cdots + \| x_{n+p} \| \to 0$$

知$\{S_n\}$为 X 中的 Cauchy 列,故收敛,从而有$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛.

充分性:设$\{x_n\}$是 X 中的 Cauchy 列,则对

$$\varepsilon = \frac{1}{2^k} \quad (k = 1,2,\cdots),$$

$\exists n_k \in \mathbf{N}$,使当 $m,n \geqslant n_k$ 时(不妨设 $n_k > n_{k-1}$),有

$$\| x_n - x_m \| < \frac{1}{2^k}, \tag{3.3.4}$$

特别地,有

$$\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| < \frac{1}{2^k},$$

故由$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$的收敛性,知$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \|$收敛,从而有$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$收敛.此时部分和

$$\sum_{i=1}^{k-1} (x_{n_{i+1}} - x_{n_i}) = x_{n_k} - x_{n_{k-1}} + x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}} + \cdots + x_{n_2} - x_{n_1}$$
$$= x_{n_k} - x_{n_1}$$

应收敛,由此可知点列$\{x_{n_k}\}$收敛,有极限 $x \in X$.下证$\{x_n\}$也收敛到 x.

$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbf{N}$,使得$\frac{1}{2^k} < \varepsilon$.取 $N = n_k$,由式(3.3.4),知当 $n > N$ 时,有

$$\| x_n - x_{n_{k+l}} \| \leqslant \frac{1}{2^k} < \varepsilon,$$

再令 $l \to \infty$,有

$$\| x_n - x \| < \varepsilon,$$

从而有 $x_n \to x$,X 是完备的.证毕.

定理 3.3.1 的意义在于,判定 Banach 空间中级数的收敛性,可以使用我们所熟知的正项级数审敛法来判定它的绝对收敛性,而不必另搞一套.

下面我们给出完备赋范空间的子空间也完备的一个充要条件.

定理 3.3.2 设 Y 是 Banach 空间 X 的子空间,则 Y 是 Banach 空间$\Leftrightarrow Y$ 是 X 的闭子空间.

证 由定理 2.5.2,作为距离空间 X 的子集,

$$Y \text{ 完备} \quad \Leftrightarrow \quad Y \text{ 为 } X \text{ 中的闭集}.$$

由于赋范空间 X 的子空间按照 X 的范数也是赋范空间,故 Y 是 Banach 空间$\Leftrightarrow Y$ 是 X 的闭子空间.证毕.

例 3.3.8　设 $P([0,1])$ 是 $[0,1]$ 上的多项式全体，则 $P([0,1])$ 作为 $C([0,1])$ 的子空间不是 Banach 空间.

证　$C([0,1])$ 是 Banach 空间，令

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!},$$

并记 $p=e^t$，则 $\{p_n\}\subset P([0,1])$，且当 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\| p_n - p \|_\infty &= \max_{t\in[0,1]} |p_n(t) - e^t| \\ &= \max_{t\in[0,1]} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \\ &= \max_{t\in[0,1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \to 0,\end{aligned}$$

故 $p_n\to p$. 由于 $p\notin P([0,1])$，故 $P([0,1])$ 不是 $C([a,b])$ 的闭子空间，故不完备.

定理 3.3.3　对赋范空间 X,Y，$X\times Y$ 依积范数是 Banach 空间 $\Leftrightarrow X,Y$ 是 Banach空间.

习　题　3.3

1. 设 $\{x_n\}$ 是赋范空间 X 中的 Cauchy 列，证明：$\{x_n\}$ 有界.
2. 证明：连续函数空间 $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间.
3. 证明：空间

$$C_0(\mathbf{R}) = \{x\in C(\mathbf{R}):\lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0\}$$

依上确界范数

$$\| x \|_0 = \sup_{t\in\mathbf{R}} |x(t)|$$

是 Banach 空间.

4. 设 X 为 Banach 空间，$\{x_n\}\subset X$，证明：若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛，则

$$x_n\to 0\quad (n\to\infty).$$

3.4　有限维赋范空间

1. 范数的等价性

定义 3.4.1　设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数，若 $\forall\{x_n\}\subset X$，

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n \|_1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} \| x_n \|_2 = 0,$$

则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是**等价的**.

由于同一空间上等价的范数定义出相同的收敛性，因而对于所有基于极限的问题使用哪一个范数是没有区别的.

下面我们给出两个范数等价的一个判别方法.

定理 3.4.1(等价范数定理) 线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价的充分必要条件是:$\exists C_1, C_2>0$,使得 $\forall x\in X$,有

$$C_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant C_2\|x\|_1.$$

证 必要性:设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价,若不存在 $C_2>0$,使得 $\forall x\in X$,均有

$$\|x\|_2\leqslant C_2\|x\|_1,$$

则 $\forall n\in\mathbf{N}$, $\exists x_n\in X$,使得

$$\|x_n\|_2>n\|x_n\|_1.$$

记

$$y_n=\frac{1}{\|x_n\|_2}x_n,$$

则当 $n\to\infty$ 时,

$$\|y_n\|_1=\frac{1}{\|x_n\|_2}\|x_n\|_1<\frac{1}{n}\to 0,$$

$$\|y_n\|_2=\frac{1}{\|x_n\|_2}\|x_n\|_2=1\not\to 0,$$

这与 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价矛盾,故 $\exists C_2>0$,使得 $\forall x\in X$,

$$\|x\|_2\leqslant C_2\|x\|_1.$$

同理可证,$\exists C_1^{-1}>0$,使得 $\forall x\in X$,

$$\|x\|_1\leqslant C_1^{-1}\|x\|_2,$$

合之,得

$$C_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant C_2\|x\|_1.$$

充分性:$\forall\{x_n\}\subset X$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_1=0$,则由

$$\|x_n\|_2\leqslant C_2\|x_n\|_1,$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_2=0$;若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_2=0$,则由

$$\|x_n\|_1\leqslant\frac{1}{C_1}\|x_n\|_2,$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_1=0$,故两个范数等价. 证毕.

有限维线性空间具有比无限维线性空间更好的性质,其中之一就是同一空间上范数的等价性.

定理 3.4.2 n 维线性空间 X 上的任意两个范数都是等价的.

证 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 X 上的一个基,$\forall x=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ke_k\in X$,定义

$$\|x\|_2=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $\|x\|_2$ 是 X 上的一个范数. 设 $\|x\|$ 是 X 上的任一范数,则

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \ \|e_k\|$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

记 $C_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则

$$\|x\| \leqslant C_2\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = C_2\|x\|_2, \tag{3.4.1}$$

下证 $\exists C_1>0$，使得 $\forall x\in X$，$\|x\|\geqslant C_1\|x\|_2$，即

$$\left\|\frac{1}{\|x\|_2}x\right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \geqslant C_1.$$

注意到

$$\left\|\frac{1}{\|x\|_2}x\right\|_2 = 1,$$

而在 $\mathbf{K}^n$ 中，单位球面 S 是有界闭集，从而是紧集，故令 $f:\mathbf{K}^n\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| = \|x\|,$$

则由

$$|f(x_1,\cdots,x_n) - f(y_1,\cdots,y_n)|$$

$$= |\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x-y\| = \left\|\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)e_k\right\|$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = C_2\|x-y\|_2,$$

知 f 是 S 上的连续函数，从而可取到最小值 $C_1>0$. 由于

$$\frac{1}{\|x\|_2}(x_1,\cdots,x_n)\in S,$$

故有

$$f\left(\frac{1}{\|x\|_2}x_1,\cdots,\frac{1}{\|x\|_2}x_n\right) = \left\|\frac{1}{\|x\|_2}x\right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_2}\geqslant C_1. \tag{3.4.2}$$

综合式(3.4.1)、式(3.4.2)，得

$$C_1\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant C_2\|x\|_2,$$

故由等价范数定理，知 $\|x\|$ 与 $\|x\|_2$ 等价. 证毕.

2. 赋范空间的同构

定义 3.4.2　设 X,Y 为赋范空间，$T:X\to Y$ 是从 X 到 Y 的线性同构映射，且 T 和 T^{-1} 都是连续的，则称 T 为 X 到 Y 的**拓扑同构映射**，并称 X 与 Y **拓扑同构**.

拓扑同构是一种等价关系. 在拓扑同构的意义下,由 T 连续,知 T 将 X 中的紧集映为 Y 中的紧集(定理 2.7.8);由 T^{-1} 连续,知 T 将 X 中的开集映为 Y 中的开集,将 X 中的闭集映为 Y 中的闭集(定理 2.3.4),反之亦然,故两拓扑同构的赋范空间,不仅线性结构相同,而且拓扑结构也相同.

定理 3.4.3 数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 维赋范空间都是拓扑同构的.

证 由传递性,只需证 $(X, \|\cdot\|)$ 与 $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_2)$ 拓扑同构.

设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 X 的一个基,则 $\forall x \in X$,存在唯一的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{K}$,使得

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

令

$$Tx = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{3.4.3}$$

则 T 是 X 到 $\mathbf{K}^n$ 的线性同构映射,且 T^{-1} 存在. 令

$$\|x\|_2 = \|Tx\|_2,$$

则 $\|\cdot\|_2$ 也是 X 的一个范数,所以由等价范数定理,$\exists C_1, C_2 > 0$,使得

$$C_1 \|x-y\| \leqslant \|Tx - Ty\|_2 \leqslant C_2 \|x-y\|. \tag{3.4.4}$$

由 $\|Tx-Ty\|_2 \leqslant C_2 \|x-y\|$,知 T 连续;下证 T^{-1} 连续.

$\forall u, v \in \mathbf{K}^n$,由 T 是满射,知 $\exists x, y \in X$,使得

$$u = Tx, \qquad v = Ty,$$

故由 $C_1 \|x-y\| \leqslant \|Tx-Ty\|_2$,得

$$\|T^{-1}u - T^{-1}v\| \leqslant \frac{1}{C_1} \|u-v\|_2,$$

从而有 T^{-1} 连续,故 T 是 X 到 $\mathbf{K}^n$ 的拓扑同构映射. 证毕.

推论 3.4.1 任一有限维赋范空间都是 Banach 空间.

证 对 n 维赋范空间 X,由式(3.4.4),知在拓扑同构映射(3.4.3)下,T 将 X 中的 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 映为 $\mathbf{K}^n$ 中的 Cauchy 列 $\{Tx_n\}$. 由 $\mathbf{K}^n$ 的完备性,知 $\exists y \in \mathbf{K}^n$,使得

$$Tx_n \to y \quad (n \to \infty);$$

由 T 是双射,知存在唯一的 $x \in X$,使得 $Tx = y$;再由式(3.4.4),

$$\|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{C_1} \|Tx_n - Tx\|_2 \to 0, \tag{3.4.5}$$

故 $x_n \to x$,X 是完备的. 证毕.

推论 3.4.2 任一赋范空间的有限维子空间都是 Banach 空间,从而也是闭子空间.

证 设 Y 是赋范空间 X 的有限维子空间,则 Y 在 X 的范数下也是赋范空间,

故由推论 3.4.1，Y 是 Banach 空间.

再由定理 3.3.2，Y 是 X 的闭子空间. 证毕.

3. 有限维赋范空间的特征

下面先证一个引理，在本节和第 6 章中都要用到它.

引理 3.4.1(Riesz[①] 引理)　设 Y 是赋范空间 X 的闭子空间，$Y\neq X$，则 $\forall r\in(0,1)$，$\exists x_0\in X$，使得 $\|x_0\|=1$，且

$$d(x_0,Y)\geqslant r.$$

证　取 $x_1\in X\setminus Y$，并记

$$d=d(x_1,Y)=\inf_{y\in Y}\|x_1-y\|,$$

则 $d>0$，否则 $x_1\in\overline{Y}=Y$. 由于 $0<r<1$，故 $\exists y_1\in Y$，使得

$$\|x_1-y_1\|<\frac{d}{r},$$

否则由下确界的定义，有

$$d=\inf_{y\in Y}\|x_1-y\|\geqslant\frac{d}{r}>d,$$

矛盾. 令

$$x_0=\frac{1}{\|x_1-y_1\|}(x_1-y_1),$$

则 $\|x_0\|=1$，且 $\forall y\in Y$，有

$$\begin{aligned}\|x_0-y\|&=\left\|\frac{1}{\|x_1-y_1\|}(x_1-y_1)-y\right\|\\&=\frac{1}{\|x_1-y_1\|}\ \|x_1-(y_1+\|x_1-y_1\|y)\|\\&\geqslant\frac{1}{\|x_1-y_1\|}d(x_1,Y)>\frac{r}{d}d=r,\end{aligned}$$

从而有

$$d(x_0,Y)=\inf_{y\in Y}\|x_0-y\|\geqslant r.$$

证毕.

定理 3.4.4　对赋范空间 X，下列条件是等价的：

① X 是有限维的；

② X 中的有界集都是列紧集；

③ X 中的有界闭集都是紧集；

④ X 中的单位闭球

---

① 里斯(1880～1956 年)，匈牙利数学家.

$$\bar{B}_1(0) = \{x \in X: \|x\| \leqslant 1\}$$

是紧集;

⑤ X 中的单位球面

$$S = \{x \in X: \|x\| = 1\}$$

是紧集.

证 ①⇒②:设

$$\dim(X) = n,$$

则拓扑同构映射 $T: X \to \mathbf{K}^n$(式(3.4.3))是一个连续线性算子,它将 X 中的任一有界集 A 映为 $\mathbf{K}^n$ 中的有界集 $T(A)$(定理 5.1.1). 由于 $\mathbf{K}^n$ 中有界集都是列紧集,故 $\forall \{x_n\} \subset A$, $\{Tx_n\}$ 有收敛子列 $\{Tx_{n_k}\}$,即 $\exists y \in \mathbf{K}^n$,使得

$$Tx_{n_k} \to y \quad (k \to \infty).$$

由 T 是双射,知存在唯一的 $x \in X$,使得

$$y = Tx,$$

故由式(3.4.5),得

$$\|x_{n_k} - x\| \leqslant C_1^{-1} \|Tx_{n_k} - Tx\|_2 = C_1^{-1} \|Tx_{n_k} - y\|_2 \to 0,$$

从而得 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$,故 A 是列紧集.

②⇒③:若 A 是 X 中的有界闭集,则由 A 有界知 A 列紧,而列紧的闭集是紧集,故 A 是紧集.

③⇒④:单位闭球 $\bar{B}_1(0)$ 是 X 中的有界闭集,故是紧集.

④⇒⑤:$\forall \{x_n\} \subset S \subset \bar{B}_1(0)$,由 $\bar{B}_1(0)$ 的紧性知 $\{x_n\}$ 有收敛于 $\bar{B}_1(0)$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$,其极限为 x,则由范数的连续性,

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

从而有 $x \in S$, S 为紧集.

⑤⇒①:反证,设

$$\dim X = \infty,$$

则 $\exists \{x_n\} \subset X$,其中任意有限个元素都线性无关. 令

$$X_n = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

则 X_n 是 X 的有限维子空间,从而是 X 的闭子空间. 由于 X_{n-1} 是 X_n 的真子空间,故由 Riesz 引理,$\exists x_n \in X_n$,使得 $\|x_n\| = 1$,且

$$d(x_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2},$$

于是我们有 $\bar{B}_1(0)$ 中的点列 $\{x_n\}$,满足对 $\forall m > n (n = 2, 3, \cdots)$,有

$$\|x_m - x_n\| \geqslant d(x_m, X_{m-1}) \geqslant \frac{1}{2},$$

故 $\{x_n\}$ 的任一子列都不可能是 Cauchy 列,从而无收敛子列,这与 $\bar{B}_1(0)$ 是紧集矛

盾,故 X 是有限维的. 证毕.

习　题　3.4

1. 在 $C([a,b])$ 中, $\forall u\in C([a,b])$, 令

$$\|u\|_1=\left(\int_0^1 |u(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_2=\left(\int_0^1 (1+t)\,|u(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

证明: $\|u\|_1$ 与 $\|u\|_2$ 是两个等价范数.

2. 设 $P_n([a,b])$ 为 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式全体,证明: $P_n([a,b])$ 按范数

$$\|u\|_\infty=\max_{x\in[a,b]}|u(x)|$$

是 Banach 空间.

3. 设 $\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ 是赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中的线性无关子集,证明: $\forall\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in \mathbf{K}^n$, 有

$$\alpha\sum_{k=1}^n|\lambda_k|\leqslant\left\|\sum_{k=1}^n\lambda_k x_k\right\|\leqslant\beta\sum_{k=1}^n|\lambda_k|,$$

其中正常数 α,β 与 λ 无关.

4. 证明: 多项式

$$u(x)=\sum_{k=0}^n a_k x^k$$

满足不等式

$$\max_{x\in[0,2]}|u(x)|\leqslant C_n\sum_{k=1}^n|a_k|,$$

其中常数 C_n 与 u 无关.

第 4 章　内积空间与 Hilbert 空间

在前两章,我们已将 Euclid 空间中的距离和长度的概念分别推广到了距离空间和赋范空间,使得许多涉及向量的长度的结论都能在赋范空间中得以直观地运用. 由于通常的有关向量的夹角的几何概念(如垂直、平行)没有在赋范空间中得到反映,因此有必要在线性空间中引入向量的内积的概念,以形成结构更为丰富的内积空间. 本章主要介绍有关内积空间的概念,并重点讨论完备的内积空间——Hilbert 空间的特性.

4.1　内 积 空 间

1. 内积空间的定义

定义 4.1.1　设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间,若存在映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\to\mathbf{K}$,使得 $\forall x,y,z\in X,\alpha,\beta\in\mathbf{K}$,下列内积公理成立:

1° 对第一变元的线性:

$$\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle;$$

2° 共轭对称性:

$$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle};$$

3° 正定性:$\langle x,x\rangle\geqslant 0$ 且

$$\langle x,x\rangle=0\quad\Leftrightarrow\quad x=0,$$

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 X 上的**内积**,X 为 $\mathbf{K}$ 上的**内积空间**,记作 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

由公理 1°、公理 2°,还可以推出内积具有以下性质:

4° 对第二变元的共轭线性:

$$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\bar{\beta}\langle x,z\rangle;$$

证　由共轭对称性,有

$$\begin{aligned}\langle x,\alpha y+\beta z\rangle&=\overline{\langle \alpha y+\beta z,x\rangle}\\&=\overline{\alpha\langle y,x\rangle+\beta\langle z,x\rangle}\\&=\bar{\alpha}\,\overline{\langle y,x\rangle}+\bar{\beta}\,\overline{\langle z,x\rangle}\\&=\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\bar{\beta}\langle x,z\rangle.\end{aligned}$$

注　当 X 为实内积空间时,2°成为对称性,4°成为对第二变元的线性.

5° $\langle x,0\rangle=\langle 0,x\rangle=0$.

例 4.1.1　$\forall x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in \mathbf{R}^n$，定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k,$$

则$(\mathbf{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是一个内积空间.

例 4.1.2　$\forall x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in \mathbf{C}^n$，定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_k \bar{y}_k,$$

则$(\mathbf{C}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是一个内积空间.

例 4.1.3　$\forall x=(x_1,x_2,\cdots), y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^2$，定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}x_k \bar{y}_k,$$

则$(l^2,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是一个内积空间.

例 4.1.4　$\forall x(t),y(t)\in L^2([a,b])$，定义

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\mathrm{d}t,$$

则$(L^2([a,b]),\langle\cdot,\cdot\rangle)$是一个内积空间.

2. 内积的性质

(1) Schwarz[①] 不等式

定理 4.1.1(Schwarz 不等式)　设$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是内积空间，则$\forall x,y\in X$，有

$$|\langle x,y\rangle|^2\leqslant\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle. \tag{4.1.1}$$

证　当 $y=0$ 时，

$$\langle x,y\rangle=\langle y,y\rangle=0,$$

故式(4.1.1)两边均为 0，等号成立；

当 $y\neq0$ 时，由

$$\begin{aligned}0&\leqslant\langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle\\&=\langle x,x\rangle-\alpha\langle y,x\rangle-\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\bar{\alpha}\langle y,y\rangle,\end{aligned}$$

将

$$\alpha=\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$$

代入，就有

$$0\leqslant\langle x,x\rangle-\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y,x\rangle-\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle+\frac{\langle x,y\rangle\,\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle^2}\langle y,y\rangle$$

---

① 施瓦茨(1843～1921 年)，德国数学家.

$$= \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}$$
$$= \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle},$$

移项即得式(4.1.1). 证毕.

(2) 由内积导出的范数

定理 4.1.2 设$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是内积空间，$\forall x\in X$，定义

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle},$$

则$\|\cdot\|$是X上的范数.

证 显然，$\|\cdot\|$满足正定性和绝对齐次性，下面来验证三角不等式. 由

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle\\ &= \|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2\\ &= \|x\|^2+\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}+\|y\|^2\\ &= \|x\|^2+2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2+2|\langle x,y\rangle|+\|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

得

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|,$$

故$\|\cdot\|$是X上的范数. 证毕.

注 此时，称

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

为由内积导出的范数.

在范数的记号下，Schwarz 不等式(4.1.1)可简写为

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

(3) 内积的连续性

定理 4.1.3 若在内积空间$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$中有

$$x_n\to x,\quad y_n\to y,$$

则

$$\lim_{m,n\to\infty}\langle x_n,y_m\rangle = \langle x,y\rangle.$$

证 由 Schwarz 不等式，当$m,n\to\infty$时，有

$$|\langle x_n,y_m\rangle-\langle x,y\rangle| = |\langle x_n,y_m\rangle-\langle x_n,y\rangle+\langle x_n,y\rangle-\langle x,y\rangle|$$

$$\begin{aligned}&= |\langle x_n, y_m - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leqslant |\langle x_n, y_m - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leqslant \|x_n\| \|y_m - y\| + \|y\| \|x_n - x\| \to 0,\end{aligned}$$

故有$\langle x_n, y_m\rangle \to \langle x, y\rangle (m, n \to \infty)$. 证毕.

定理 4.1.3 表明,内积是 $X \times X \to \mathbf{K}$ 的连续泛函.

3. Hilbert 空间的概念

定义 4.1.2　完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**.

由于完备性的概念是建立在距离定义的基础上的,故等价地说,一个内积空间称为 Hilbert 空间,若其按由内积导出的范数是完备的距离空间. 基于此,有关 Banach 空间的一些性质,我们可以轻易地移植到 Hilbert 空间上来.

定理 4.1.4　设 H 是 Hilbert 空间,Y 是 H 的子空间,则

1° Y 是 Hilbert 空间$\Leftrightarrow Y$ 是 H 的闭子空间;

2° $\dim Y < \infty \Rightarrow Y$ 是 Hilbert 空间.

例 4.1.5　$\mathbf{K}^n, l^2, L^2([a,b])$在各自的内积定义下(见例 4.1.1～例 4.1.4)均为 Hilbert 空间.

例 4.1.6　$C([a,b])$作为 $L^2([a,b])$的子空间在内积

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$$

下是内积空间,但不是 Hilbert 空间(见例 2.5.4 注).

习　题　4.1

1. 设 X 为内积空间,证明:$\forall x \in X$,

$$\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0.$$

2. 设 X 为内积空间,$x, y \in X$,若$\forall z \in X$,均有

$$\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle,$$

证明:$x = y$.

3. 证明:当把几乎处处相等的函数看作同一函数时,

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$$

是 $L^2([a,b])$上的内积.

4. 设 X 为内积空间,$\{x_n\} \subset X$,若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛,则$\forall z \in X$,有

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k, z\right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, z\rangle.$$

4.2 内积与范数的关系

1. 极化恒等式

在由内积导出的范数下，内积空间 X 成为一个赋范空间，它具有一般赋范空间的所有性质. 内积与由内积导出的范数具有下列等式关系：

定理 4.2.1 设 X 为实内积空间，则 $\forall x,y\in X$，有

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2). \tag{4.2.1}$$

证 由于

$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle$$
$$=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2, \tag{4.2.2}$$
$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle$$
$$=\|x\|^2-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\|y\|^2, \tag{4.2.3}$$

故两式相减，得

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=2(\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle). \tag{4.2.4}$$

X 为实内积空间，故有

$$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle,$$

结论成立. 证毕.

定理 4.2.2 设 X 为复内积空间，则 $\forall x,y\in X$，有

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2). \tag{4.2.5}$$

证 由式(4.2.4)，有

$$\|x+\mathrm{i}y\|^2-\|x-\mathrm{i}y\|^2=2(\langle x,\mathrm{i}y\rangle+\langle \mathrm{i}y,x\rangle)$$
$$=2(-\mathrm{i}\langle x,y\rangle+\mathrm{i}\langle y,x\rangle),$$

从而有

$$\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2=2(\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle), \tag{4.2.6}$$

式(4.2.4)与式(4.2.6)相加，即得式(4.2.5). 证毕.

那么，一个赋范空间，能否借助等式(4.2.1)或式(4.2.5)升格为内积空间？回答是否定的，因为它的范数还需满足下述的平行四边形法则.

2. 平行四边形法则

定理 4.2.3 赋范空间 X 是内积空间的充分必要条件是：其中的范数满足平行四边形法则，即 $\forall x,y\in X$，有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \qquad (4.2.7)$$

证　必要性：式(4.2.2)与式(4.2.3)相加，即得式(4.2.7).

充分性：当 K=R 与 K=C 时，分别用极化恒等式(4.2.1)与式(4.2.5)定义出来的$\langle\cdot,\cdot\rangle$可以验证满足内积公理，因而$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$构成内积空间. 证毕.

平行四边形法则正好表示了一个我们熟知的几何结论：平行四边形的两条对角线的平方和等于四边的平方和(见图 4-1).

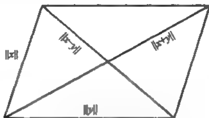


图 4-1　平行四边形法则

例 4.2.1　$(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$不是内积空间.

证　取

$$x(t)=1,\quad y(t)=\frac{t-a}{b-a}\in C([a,b]),$$

就有

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty^2+\|x-y\|_\infty^2&=\left\|1+\frac{t-a}{b-a}\right\|_\infty^2+\left\|\frac{b-t}{b-a}\right\|_\infty^2\\&=\left(\max_{t\in[a,b]}\left|1+\frac{t-a}{b-a}\right|\right)^2+\left(\max_{t\in[a,b]}\left|\frac{b-t}{b-a}\right|\right)^2\\&=2^2+1^2=5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(\|x\|_\infty^2+\|y\|_\infty^2)&=2\left[(\max_{t\in[a,b]}|1|)^2+\left(\max_{t\in[a,b]}\left|\frac{t-a}{b-a}\right|\right)^2\right]\\&=2(1^2+1^2)=4,\end{aligned}$$

两者不相等，故平行四边形法则不成立，$C([a,b])$在范数$\|\cdot\|_\infty$下不可能成为内积空间.

例 4.2.2　$(L^p([a,b]),\|\cdot\|_p)$当 $p\neq2$ 时不是内积空间.

证　令$c=\dfrac{a+b}{2}$，取

$$u(t)=1,\qquad v(t)=\begin{cases}-1, & x\in[a,c),\\ 1, & x\in[c,b],\end{cases}$$

则有

$$\| u+v \|_p^2 + \| u-v \|_p^2 = \left(\int_c^b 2^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_a^c 2^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$= 2\left(2^p \frac{b-a}{2}\right)^{\frac{2}{p}} = 2^{3-\frac{2}{p}}(b-a)^{\frac{2}{p}},$$

$$2(\| u \|_p^2 + \| v \|_p^2) = 4(b-a)^{\frac{2}{p}} = 2^2(b-a)^{\frac{2}{p}},$$

要使两者相等,必须有

$$2 = 3 - \frac{2}{p},$$

故当 $p\neq 2$ 时两者不相等,$L^p([a,b])$不构成内积空间.

3. 常见空间的属性

从第 2 章起,我们陆续接触了许多具体空间的例子,下面我们将一些常见空间的最高属性列于表 4-1 中,以方便大家对它们的特性有一个总体的把握.

表 4-1 常见空间的属性

空　间	内积 · 范数 · 距离	性　质
n 维 Euclid 空间 $\mathbb{K}^n$	$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$	Hilbert 空间
数列空间 $\mathbb{R}^\infty$	$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lvert x_k - y_k \rvert}{2^k(1+\lvert x_k - y_k \rvert)}$	完备距离空间
平方可和数列空间 l^2	$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$	Hilbert 空间
p 次幂可和数列空间 l^p $(p\geqslant 1, p\neq 2)$	$\| x \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert^p)^{\frac{1}{p}}$	Banach 空间
有界数列空间 l^∞	$\| x \|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lvert x_k \rvert$	Banach 空间
连续函数空间 $C([a,b])$	$\| x \|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \lvert x(t) \rvert$	Banach 空间
	$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$	内积空间
k 阶连续可导函数空间 $C^k([a,b])$	$\| x \| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} \lvert x^{(i)}(t) \rvert$	Banach 空间
平方可积函数空间 $L^2([a,b])$	$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$	Hilbert 空间
p 次幂可积函数空间 $L^p([a,b])$ $(p\geqslant 1, p\neq 2)$	$\| x \|_p = \left(\int_a^b \lvert x(t) \rvert^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$	Banach 空间
有界函数空间 $B(\Omega)$	$\| x \|_0 = \sup_{t\in\Omega} \lvert x(t) \rvert$	Banach 空间

习　题　4.2

1. 设实数列$\{x_n\}$满足$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$,证明:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k x_{k+1}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty.$$

2. 设$\{x_n\}$是内积空间X中的点列,证明:$x_n \to x$的充分必要条件是:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|,$$
$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle (n\to\infty), \quad \forall y \in X.$$

3. 设X为内积空间,$x,y\in X$是两个单位向量,且

$$\|x+y\| = 2,$$

证明:$x=y$.

4. 证明:有界函数空间$(B([a,b]), \|\cdot\|_0)$不是内积空间.

4.3　正交与正交系

1. 正交性

有了内积的概念,我们就可以定义向量与向量、向量与集合、集合与集合之间的正交性,从而将直角坐标、垂直投影等Euclid空间的几何概念推广到一般的内积空间,建立起内积空间几何学.

(1) 正交的概念

定义 4.3.1　设X是内积空间,$x,y\in X$,$M,N\subset X$.

1° 若$\langle x,y\rangle=0$,则称x,y是**正交的**,记作

$$x\perp y;$$

2° 若$\forall a\in M$,都有$x\perp a$,则称x与M正交,记作

$$x\perp M;$$

3° 若$\forall x\in M, y\in N$,都有$x\perp y$,则称M与N正交,记作

$$M\perp N.$$

注　零元0是唯一一个与所有向量均正交的向量.

(2) 勾股定理

定理 4.3.1(勾股定理)　设X是内积空间,

1° 若$x,y\in X$且$x\perp y$,则

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2; \tag{4.3.1}$$

2° 若 $x_1,\cdots,x_n$ 在 X 中两两正交，则

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2. \tag{4.3.2}$$

证 注意到式(4.3.1)是式(4.3.2)的特例，故只需证 2°. 由于 $x_1,\cdots,x_n$ 两两正交，故 $\forall i\neq k$，有 $\langle x_k,x_i\rangle=0$，因此，

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^2&=\left\langle\sum_{k=1}^{n}x_k,\sum_{i=1}^{n}x_i\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle x_k,x_i\rangle\\&=\sum_{k=1}^{n}\langle x_k,x_k\rangle=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2,\end{aligned}$$

故式(4.3.2)成立. 证毕.

2. 正交补

定义 4.3.2 设 X 是内积空间，$M\subset X$，则 X 中与 M 正交的向量全体称为 M 的正交补，记作 $M^{\perp}$.

定理 4.3.2 设 X 是内积空间，$M\subset X$，则 $M^{\perp}$ 为 X 的闭子空间.

证 首先，$\forall x,y\in M^{\perp}$，$\alpha,\beta\in\mathbf{K}$，$\forall z\in M$，有

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle=0,$$

故 $\alpha x+\beta y\in M^{\perp}$，$M^{\perp}$ 是 X 的线性子空间；

其次，设 x 是 $M^{\perp}$ 的一个聚点，则 $\exists\{x_n\}\subset M^{\perp}$，使得 $x_n\to x$. 此时，$\forall z\in M$，有 $\langle x_n,z\rangle=0$，再由内积的连续性，有

$$\langle x,z\rangle=\langle\lim_{n\to\infty}x_n,z\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x_n,z\rangle=0,$$

即 $x\in M^{\perp}$，故 $M^{\perp}$ 是 X 的闭子空间. 证毕.

定理 4.3.2 表明，无论 M 是否为 X 的子空间，M 的正交补 $M^{\perp}$ 都是 X 的子空间，而且是闭子空间.

定理 4.3.3 设 X 是内积空间，若 $\overline{M}=X$，则

$$M^{\perp}=\{0\},$$

即与 X 的稠集正交的元素只有零元素.

证 $\forall x\in M^{\perp}$，由

$$x\in X=\overline{M}$$

知 $\exists\{x_n\}\subset M$，使得 $x_n\to x$，再由 $\langle x_n,x\rangle=0$，得

$$\langle x,x\rangle=\langle\lim_{n\to\infty}x_n,x\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x_n,x\rangle=0,$$

故 $x=0$. 证毕.

3. 正交系

(1) 内积空间中的正交系

定义 4.3.3　设 M 为内积空间 X 的子集，若 M 中的任意两个向量均正交，则称 M 为 X 的一个**正交系**；若 M 为 X 的一个正交系且 M 中的任一向量的范数均为 1，则称 M 为 X 的一个**标准正交系**.

例 4.3.1　在 $\mathbf{K}^n$ 中，

$$e_1=(1,0,\cdots,0),\quad e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\quad e_n=(0,0,\cdots,1)$$

是一个标准正交系.

例 4.3.2　在 l^2 中，

$$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},1,0,\cdots)\quad (n=1,2,\cdots)$$

是一个标准正交系.

例 4.3.3　在实 $L^2([-\pi,\pi])$ 中，

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$$

是一个标准正交系.

例 4.3.4　在复 $L^2([-\pi,\pi])$ 中，

$$\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}\tag{4.3.3}$$

是一个标准正交系.

证　因为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}dt=1,$$

且当 $m\neq n$ 时，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{imt}}{\sqrt{2\pi}}\overline{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)t}dt=0,$$

故(4.3.3)为 $L^2([-\pi,\pi])$ 的标准正交系.

定理 4.3.4　不含零元的正交系中的向量是线性无关的.

证　任取正交系中的有限个向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，令

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0,$$

则 $\forall k=1,2,\cdots,n$，有

$$\begin{aligned}a_k\|x_k\|^2&=a_k\langle x_k,x_k\rangle=\langle a_kx_k,x_k\rangle\\&=\langle a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,x_k\rangle\\&=\langle 0,x_k\rangle=0,\end{aligned}$$

因为 $x_k\neq 0$,所以 $a_k=0$,故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关. 证毕.

(2) Schmidt[①] 正交化过程

由定理 4.3.4,标准正交系必线性无关,现有一线性无关的向量组,又该如何将其改造为标准正交系? 这就需要用到下面的 Schmidt 正交化过程.

定理 4.3.5 设 X 是内积空间,$\{x_n\}$ 是 X 中的线性无关子集,则存在标准正交系 $\{e_n\}$,使得 $\forall n\in\mathbb{N}$,有

$$\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}.$$

证 因为 $x_1\neq 0$,令

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|},$$

则有 $\|e_1\|=1$,且

$$\operatorname{span}\{e_1\}=\operatorname{span}\{x_1\};$$

由 x_2 与 x_1 线性无关,知 x_2 与 e_1 线性无关,故

$$x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1\neq 0,$$

且

$$\langle x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1,e_1\rangle=\langle x_2,e_1\rangle-\langle x_2,e_1\rangle\langle e_1,e_1\rangle=0,$$

故令

$$e_2=\frac{x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1}{\|x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1\|},$$

则有 $\|e_2\|=1$,$e_2\perp e_1$,且

$$\operatorname{span}\{e_1,e_2\}=\operatorname{span}\{x_1,x_2\}.$$

一般地,令

$$e_{n+1}=\frac{x_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\langle x_{n+1},e_k\rangle e_k}{\left\|x_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\langle x_{n+1},e_k\rangle e_k\right\|},\tag{4.3.4}$$

则 $\{e_n\}$ 即为所求. 证毕.

(3) Bessel 不等式

定理 4.3.6 设 $\{e_k\}$ 是内积空间 X 中的一个标准正交系,则 $\forall x\in X, n\in\mathbb{N}$,有

1° $$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2;\tag{4.3.5}$$

① 施密特(1876~1959 年),德国数学家.

2° (Bessel① 不等式) $\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$ (4.3.6)

证　令

$$x_n=x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k,$$

则 $\forall i=1,2,\cdots,n$,有

$$\begin{aligned}\langle x_n,e_i\rangle&=\langle x,e_i\rangle-\left\langle\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k,e_i\right\rangle\\&=\langle x,e_i\rangle-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle\langle e_k,e_i\rangle\\&=\langle x,e_i\rangle-\langle x,e_i\rangle\langle e_i,e_i\rangle\\&=\langle x,e_i\rangle-\langle x,e_i\rangle=0,\end{aligned}$$

即 $x_n\perp\{e_1,\cdots,e_n\}$,故由勾股定理,得

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\left\|\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k+x_n\right\|^2\\&=\left\|\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2+\|x_n\|^2\\&=\sum_{k=1}^{n}\|\langle x,e_k\rangle e_k\|^2+\|x_n\|^2\\&=\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2+\|x_n\|^2,\end{aligned}$$

即式(4.3.5)成立;再由

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2+\|x_n\|^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2,$$

令 $n\to\infty$ 即得式(4.3.6). 证毕.

注　当 Bessel 不等式等号成立时,式

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2$$

称为 Parseval② 等式. 此时,由式(4.3.5),有

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

故

① 贝塞尔(1784~1846年),德国数学家.

② 帕斯瓦尔(1755~1836年),法国数学家.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k,$$

因而 x 可以按 X 的一个标准正交系展开.

习 题 4.3

1. 设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的内积空间, $x, y \in X$, 证明:

$$x \perp y \iff \forall \alpha \in \mathbf{K}, \quad \|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|.$$

2. 在实值连续函数空间 $C([-1,1])$ 中, 定义内积

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \mathrm{d}t,$$

则 X 是一个内积空间. 记 M 为 $C([-1,1])$ 中奇函数的全体, N 为 $C([-1,1])$ 中偶函数的全体, 证明:

$$C([-1,1]) = M \oplus N,$$

且

$$M = N^{\perp}.$$

3. 设 A, B 是内积空间 X 的子集, $A \subset B$, 证明:

$$B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

4. 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系, 证明: $\forall x, y \in X$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

4.4 Hilbert 空间中的 Fourier 分析

1. Fourier 级数

在高等数学中, 我们学习了如何将一个函数展开为三角函数系的 Fourier 级数, 同样我们可以在一般的内积空间中讨论它的一个元素关于它的一个标准正交系的展开问题.

定义 4.4.1 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的一个标准正交系, $\forall x \in X$, 称级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \tag{4.4.1}$$

为 x 关于标准正交系 $\{e_n\}$ 的 **Fourier**[①] **级数**, 数 $\langle x, e_n \rangle$ 为 x 关于 e_n 的 **Fourier 系数**.

现在我们面临的问题有两个:

1° x 的 Fourier 级数(4.4.1)是否收敛?

2° 若级数(4.4.1)收敛, 它能否收敛到 x?

---

① 傅里叶(1768～1830 年), 法国数学家.

关于第一个问题，在 Hilbert 空间中有明确的结论.

引理 4.4.1　设$\{e_n\}$是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系，$\{\alpha_n\}\subset\mathbf{K}$，则级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$$

在 H 中收敛的充分必要条件是：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^2.$$

证　令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k,$$

则由勾股定理，当 $n>m$ 时有

$$\| S_n-S_m\|^2=\Big\|\sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k e_k\Big\|^2=\sum_{k=m+1}^{n}\|\alpha_k e_k\|^2=\sum_{k=m+1}^{n}|\alpha_k|^2,$$

故由 H 的完备性，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\text{ 收敛}\quad&\Leftrightarrow\quad\{S_n\}\text{ 是 }H\text{ 中的 Cauchy 列}\\&\Leftrightarrow\quad\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2\text{ 收敛}\\&\Leftrightarrow\quad(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^2,\end{aligned}$$

证毕.

注　当 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ 收敛时，由

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\Big\|^2&=\|\lim_{n\to\infty}S_n\|^2=\lim_{n\to\infty}\|S_n\|^2\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2,\end{aligned}$$

知有下列等式成立：

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\Big\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2.\tag{4.4.2}$$

定理 4.4.1　设$\{e_n\}$是 Hilbert 空间 H 中的一个标准正交系，则 $\forall x\in H$，x 的 Fourier 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$$

在 H 中收敛.

证　由 Bessel 不等式，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2<\infty,$$

故由上述引理，$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$ 在 H 中收敛. 证毕.

至于第二个问题，则与所选的标准正交系中的元素是否足够多有关.

定义 4.4.2 极大的标准正交系称为**完全标准正交系**，即不可能再添加任何向量使得添加后的集合仍为标准正交系.

2. 标准正交基

(1) 标准正交基的概念

定义 4.4.3 设$\{e_n\}$为数域 $\mathbf{K}$ 上内积空间 X 中的标准正交系，若 $\forall x\in H$，$\exists\{\alpha_n\}\subset\mathbf{K}$，使得

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k, \tag{4.4.3}$$

则称$\{e_n\}$为 X 中的**标准正交基**.

注 此时，必有

$$\alpha_k=\langle x,e_k\rangle.$$

实际上，由正交性及内积的性质，

$$\langle x,e_i\rangle=\langle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k,e_i\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k,e_i\rangle$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\langle e_k,e_i\rangle=\alpha_i\langle e_i,e_i\rangle=\alpha_i,$$

故式(4.4.3)的右端就是 x 关于$\{e_n\}$的 Fourier 级数. 定义表明，只有当$\{e_n\}$为 X 的标准正交基时，x 的 Fourier 级数才收敛到 x.

例 4.4.1 例 4.3.1～例 4.3.4 中的 4 个标准正交系分别是各自 Hilbert 空间的标准正交基.

(2) 标准正交系成为标准正交基的条件

定理 4.4.2 设 $S=\{e_n\}$是 Hilbert 空间 H 中的一个标准正交系，则以下 7 个条件等价：

① S 是 H 的标准正交基；

② $\forall x\in H$，

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k;$$

③ S 是 H 的完全标准正交系；

④ $S^{\perp}=\{0\}$；

⑤ $\overline{\mathrm{span}S}=H$；

⑥ $\forall x\in H$，Parseval 等式成立：

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2;$$

⑦ $\forall x,y\in H$，

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}.$$

注　由②可以看出，$\{\langle x,e_k\rangle\}$相当于 $\mathbf{R}^n$ 的直角坐标，称为 x 关于标准正交基 $\{e_n\}$的**正交坐标**，而⑥、⑦表明，H 中的范数和内积可以通过正交坐标来表示，这是无限维赋范空间中的 Schauder 基所无法比拟的，这就是为什么 Hilbert 空间方法要优于 Banach 空间方法的原因之一.

证　由定义 4.4.3，①⇔②(见定义 4.4.3 注).

由定义 4.4.2，③⇔④，否则 S 不是 H 的极大的标准正交系.

由式(4.3.5)，②⇔⑥(见定理 4.3.6 注).

②⇒⑤：$\forall x\in H$，令

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k,$$

则 $x_n\in \mathrm{span}S$，且当 $n\to\infty$时，

$$x_n\to\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k=x,$$

故 $x\in\overline{\mathrm{span}S}$，再由 x 的任意性，得$\overline{\mathrm{span}S}=H$.

⑤⇒④：$\forall x\in S^{\perp}$，由

$$x\in H=\overline{\mathrm{span}S}$$

知$\exists\{x_n\}\subset\mathrm{span}S$，使得 $x_n\to x$. 显然，$x\perp x_n$，故有

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x_n,x\rangle=0,$$

从而有 $x=0$，所以 $S^{\perp}=\{0\}$.

④⇒②：由于 Hilbert 空间中 Fourier 级数的收敛性(定理 4.4.1)，$\forall x\in H$，

$$y=x-\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$$

有意义，故$\forall i\in\mathrm{N}$，由

$$\begin{aligned}\langle y,e_i\rangle&=\langle x,e_i\rangle-\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\langle e_k,e_i\rangle\\&=\langle x,e_i\rangle-\langle x,e_i\rangle=0\end{aligned}$$

知 $y\in S^{\perp}$，故由 $S^{\perp}=\{0\}$得 $y=0$，从而有

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k.$$

②⇒⑦：$\forall x,y\in H$，由

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$$

得

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle&=\left\langle\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k,y\right\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\langle e_k,y\rangle\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}.\end{aligned}$$

⑦⇒④：设 $x\in S^{\perp}$，由

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}$$

得

$$\langle x,x\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle x,e_k\rangle}=0,$$

故 $x=0,S^{\perp}=\{0\}$. 证毕.

例 4.4.2 在实 $L^2([-\pi,\pi])$中，$\forall f\in L^2([-\pi,\pi])$，在标准正交基

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$$

下有

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),\quad a.e.$$

将其改写成标准形式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\pi}a_k\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{\pi}b_k\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right),\quad a.e.$$

则有

$$a_0=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\langle f(t),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\langle f(t),\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t,$$

$$b_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\langle f(t),\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t,$$

且有 Parseval 等式

$$\|f\|^2=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right].\tag{4.4.4}$$

例 4.4.3 考虑实平方可积函数空间 $L^2([-1,1])$，由于多项式集合 $P([-1,$

1])在 $L^2([-1,1])$ 中稠密,故有

$$\overline{\operatorname{span}\{1,x,x^2,\cdots\}} = L^2([-1,1]).$$

由于 $\{1,x,x^2,\cdots\}$ 不是标准正交的,故还需用 Schmidt 正交化过程将其标准正交化为 $\{p_n(x)\}$,则 $\{p_n(x)\}$ 就是 $L^2([-1,1])$ 的一个标准正交基. 由

$$\langle 1,x\rangle = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0,$$

知 $1\perp x$,可经取

$$p_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}},\quad p_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x,$$

再由式(4.3.4),有

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{x^2 - \langle x^2, p_0(x)\rangle p_0(x) - \langle x^2, p_1(x)\rangle p_1(x)}{\| x^2 - \langle x^2, p_0(x)\rangle p_0(x) - \langle x^2, p_1(x)\rangle p_1(x) \|} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

一般地,可得

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x),$$

其中 $P_n(x)$ 是 Legendre① 多项式,它是 Legendre 方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

的解,其通式为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,$$

其前 6 项的具体表达式为

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x). \end{aligned}$$

① 勒让德(1752~1833 年),法国数学家.

(3) 可数标准正交基存在的条件

定理 4.4.3 设 H 是 Hilbert 空间，则 H 有一个至多可数的标准正交基的充分必要条件是：H 可分.

证 必要性：设 $\{e_n\}$ 是 H 中的一个标准正交基，则

$$M = \left\{ \sum_{k=1}^{n} r_k e_k : r_k \in \mathbf{Q}, k = 1, 2, \cdots, n, n \in \mathbf{N} \right\}$$

就是 H 的一个可数的稠子集，H 可分.

充分性：设 H 可分，则 H 有一个稠密的可数子集

$$M = \{x_k\}.$$

取 y_1 为 M 中的第一个非零元素，y_2 为 M 中第 1 个与 x_1 线性无关的向量，y_3 为 M 中第 1 个与 y_1, y_2 线性无关的向量，如此下去，则 $\{y_k\}$ 为线性无关集，将其标准正交化，得 H 的一个标准正交系 $\{e_k\}$. 由于

$$\operatorname{span}\{e_k\} = \operatorname{span}\{y_k\} = \operatorname{span}\{x_k\},$$

则由 $\overline{M} = H$，得

$$\overline{\operatorname{span}\{e_k\}} = \overline{\operatorname{span}\{x_k\}} = H,$$

由定理 4.4.2 等价条件⑤，$\{e_k\}$ 是 H 的标准正交基. 证毕.

习 题 4.4

1. 证明：在 $\mathbf{K}^n$ 中，

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots, \quad e_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

是一个标准正交基.

2. 证明式(4.4.4).

3. $\forall x \in L^2([-\pi, \pi])$，证明：$\exists \{c_n\} \subset \mathbf{C}$，使得

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

且当 $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ 时，有

$$\int_a^b x(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_a^b e^{ikt} \mathrm{d}t.$$

4. 设 $\{e_k\}$ 与 $\{\varepsilon_k\}$ 分别为 Hilbert 空间 H 中的标准正交基与标准正交系，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| e_k - \varepsilon_k \|^2 < 1,$$

证明：$\{\varepsilon_k\}$ 为 H 中的标准正交基.

4.5　正交分解定理

1. 变分引理

在高等数学中，我们可以用不高于 n 次的多项式 $P_n(x)$ 来逼近 $[a,b]$ 上的连续函数，这就启发我们研究在抽象空间中是否也有类似的结论.

(1) 最佳逼近元

定义 4.5.1　设 M 是赋范空间 X 的子集，若对 $x\in X$，$\exists a\in M$，使得

$$\|x-a\| = d(x,M) = \inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

则称 a 是 x 在 M 中的**最佳逼近元**.

我们需要研究的问题是：

1° 存在性问题. 这样的最佳逼近元是否存在?

2° 唯一性问题. 若最佳逼近元存在是否唯一?

3° 实现问题. 如何求得最佳逼近元?

实际上，在 2 维 Euclid 空间中，若 M 为一闭凸集，则 x 在 M 中的最佳逼近元存在且唯一；若 M 非闭，则 x 在 M 中的最佳逼近元不一定存在. 例如，当

$$M=\{(s,t);s^2+t^2<1\}$$

时，$\forall x\in M^c$，M 中的任一点都不是 x 在 M 中的最佳逼近元；若 M 非凸，则 x 在 M 中的最佳逼近元不一定唯一. 例如，当

$$M=\{(s,t);s^2+t^2=1\}$$

时，M 中的任一点都是 $x=(0,0)$ 在 M 中的最佳逼近元.

注意到，$\mathbf{R}^2$ 中的闭子集都是完备集，故要将最佳逼近元的存在唯一性推广到一般的赋范空间 X 中去，M 至少应为 X 的一个完备凸集. 下面的变分引理表明，在内积空间中，有这一条件就足够了.

(2) 变分引理

定理 4.5.1(变分引理)　设 M 是内积空间 X 的完备凸集，则 $\forall x\in X$，存在唯一的 $a\in M$，使得

$$\|x-a\| = \inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

且 $x-a\in M^{\perp}$.

证　存在性：令 $d=d(x,M)$，则由下确界的定义，$\exists\{y_n\}\subset M$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\| = d.$$

下证 $\{y_n\}$ 有极限.

由 M 是凸集，知 $\forall m,n\in \mathrm{N}$，有

$$\frac{y_n+y_m}{2}\in M;$$

由平行四边形法则，有

$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2&=\|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2\\&=2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)-\|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2\\&=2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)-4\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2\\&\leqslant 2(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)-4d^2\to 0\quad(m,n\to\infty),\end{aligned}$$

故 $\{y_n\}$ 是 M 中的 Cauchy 列，由 M 的完备性，$\exists a\in M$，使得

$$y_n\to a,$$

从而有

$$\|x-a\|=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d.$$

唯一性：设有 $b\in M$，使得

$$\|x-b\|=d,$$

则由平行四边形法则，有

$$\begin{aligned}\|a-b\|^2&=\|(x-b)-(x-a)\|^2\\&=2(\|x-b\|^2+\|x-a\|^2)-4\left\|x-\frac{a+b}{2}\right\|^2\\&\leqslant 2(d^2+d^2)-4d^2=0,\end{aligned}$$

故有 $a=b$. 证毕.

注 变分引理说明了最佳逼近元的存在性和唯一性. 由于 X 的子空间是凸集，Hilbert 空间的闭子空间是 Hilbert 空间，故当定理的条件加强为

1° M 是内积空间 X 的完备子空间；

2° M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间

时，结论均成立.

2. 正交分解定理

在三维 Euclid 空间中，要在平面 M 中找出一点 a 使得它与平面外一点 x 距离最近，只需 $x-a\perp M$，即 a 是 x 在 M 中的投影. 对 Hilbert 空间 H 的闭子空间，也有类似的结论，这就是本节要介绍的正交分解定理.

(1) 投影与正交分解

定义 4.5.2 设 M 是内积空间 X 的子空间，若 $\forall x\in X$，有分解

$$x=y+z,\quad y\in M,\quad z\in M^{\perp},$$

则称其为 x 的**正交分解**，并称 y 为 x 在 M 中的**投影**(projection)，记作 $y=P_Mx$.

注　这种分解是唯一的，此时若有 $y'\in M, z'\in M^{\perp}$，使得

$$x=y+z=y'+z',$$

则由

$$y-y'=z'-z\in M\cap M^{\perp}=\{0\}$$

知 $y'=y, z'=z$.

(2) 正交分解定理

定理 4.5.2（正交分解定理）　设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，则 $\forall x\in H$，都有唯一的 $a\in M$，使得

1° a 是 x 在 M 上的最佳逼近元，即

$$\|x-a\|=d(x,M);$$

2° a 是 x 在 M 中的投影，即 x 按 M 有唯一的分解

$$x=a+(x-a),$$

其中 $x-a\perp M$；

3° H 可分解为两个子空间 M 与 $M^{\perp}$ 的直和，即

$$H=M\oplus M^{\perp}.$$

注　正交分解定理说明了投影与最佳逼近元的等价性.

证　1° H 的闭子空间是一个完备凸集，故由变分引理，$\exists a\in M$，使得

$$\|x-a\|=d(x,M).$$

2° 关键是证明 $x-a\perp M$，唯一性则由定义 4.5.2 注保证.

$\forall\lambda\in\mathbf{K}, y\in M, \|y\|=1$，并记 $d=d(x,M)$，则有

$$\begin{aligned}d^2&\leqslant\|x-(a+\lambda y)\|^2=\|(x-a)-\lambda y\|^2\\&=\|x-a\|^2-\bar{\lambda}\langle x-a,y\rangle-\lambda\langle y,x-a\rangle+|\lambda|^2\|y\|^2\\&=d^2-\bar{\lambda}\langle x-a,y\rangle-\lambda\overline{\langle x-a,y\rangle}+|\lambda|^2,\end{aligned}$$

令 $\lambda=\langle x-a,y\rangle$，得

$$d^2\leqslant d^2-|\langle x-a,y\rangle|^2,$$

故

$$\langle x-a,y\rangle=0,$$

再由 y 的任意性，知 $x-a\in M^{\perp}$.

3° 由直和的定义（定义 3.1.5），3°与 2°等价. 证毕.

定理 4.5.3　设 M 是 Hilbert 空间 H 的子空间，则 M 在 H 中稠密的充分必要条件是：$M^{\perp}=\{0\}$.

证　必要性：由定理 4.3.3 保证.

充分性：设 $M^{\perp}=\{0\}$，则由习题 4.3 中第 3 题，有

$$\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp} = \{0\},$$

故有 $\overline{M}^{\perp} = \{0\}$. 因为 M 是 H 的子空间，则由习题 4.5 中第 1 题，$\overline{M}$ 是 H 的闭子空间，从而由正交分解定理，有

$$H = \overline{M} \oplus \overline{M}^{\perp} = \overline{M},$$

故 M 在 H 中稠密. 证毕.

(3) 正交投影算子

定理 4.5.4 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，$\forall x \in H$，令

$$Px = P_M x,$$

则

1° P 是 H 上的线性算子；

2° $\|Px\| \leqslant \|x\|$； (4.5.1)

3° $P^2 = P$. (4.5.2)

注 称 P 为从 H 到 M 的**正交投影算子**.

证 1° $\forall x_1, x_2 \in H, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$，有

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2 + \alpha_1(x_1 - Px_1) + \alpha_2(x_2 - Px_2),$$

其中

$$\alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2 \in M.$$

由正交分解定理，

$$x_1 - Px_1 \in M^{\perp}, \quad x_2 - Px_2 \in M^{\perp},$$

故由 $M^{\perp}$ 是 H 的子空间，得

$$\alpha_1(x_1 - Px_1) + \alpha_2(x_2 - Px_2) \in M^{\perp},$$

再由正交分解的唯一性，即得

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2.$$

2° 由勾股定理，

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|Px + (x - Px)\|^2 \\ &= \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \geqslant \|Px\|^2,\end{aligned}$$

3° $\forall x \in H$，由于 $Px \in M$，故

$$P^2 x = P(Px) = Px,$$

从而有 $P^2 = P$. 证毕.

推论 若 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，则 M 与 $M^{\perp}$ 互为正交补，即

$$(M^{\perp})^{\perp} = M.$$

证 $\forall x \in M$，由 $x \perp M^{\perp}$，知 $x \in (M^{\perp})^{\perp}$，从而有

$$M \subset (M^{\perp})^{\perp};$$

$\forall x \in (M^{\perp})^{\perp}$，由正交分解定理，有

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in M, \quad x_2 \in M^{\perp}.$$

由 $x \perp x_2$，可得

$$\langle x_2, x_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, x_2 \rangle = \langle x, x_2 \rangle = 0,$$

从而有 $x_2 = 0, x = x_1 \in M$，即

$$(M^{\perp})^{\perp} \subset M.$$

合之，得 $M = (M^{\perp})^{\perp}$. 证毕.

注 在一般情况下，只有

$$M \subset (M^{\perp})^{\perp}.$$

习 题 4.5

1. 设 M 是赋范空间 X 的子空间，证明：$\overline{M}$ 是 X 的闭子空间.
2. 设 M 是 Hilbert 空间 H 的子空间，证明：
$$\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}.$$
3. 设 M 是 Hilbert 空间 H 的子空间，且 $\forall x \in H$，x 在 M 上的投影均存在，证明：M 是 H 的闭子空间.
4. 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，P 为从 H 到 M 的正交投影算子. 证明：$\forall x \in H$，有
$$\| Px \|^2 = \langle Px, x \rangle.$$

4.6 最佳逼近的应用

1. 最佳逼近的求法

现在，我们就来解决 4.5 节留下的第三个问题：最佳逼近元的实现问题.

定理 4.6.1 设 M 是 Hilbert 空间 H 的有限维子空间，$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为 M 的基，a 是 x 在 M 中的最佳逼近，则

$$a = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varepsilon_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) G^{-1} \begin{pmatrix} \langle x, \varepsilon_1 \rangle \\ \langle x, \varepsilon_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, \varepsilon_n \rangle \end{pmatrix},$$

其中 $G=(\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle)_{n\times n}^{\mathrm{T}}$ 为基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 的 Gram① 矩阵.

证 M 是有限维的,故是 H 的闭子空间.由正交分解定理,$x-a\in M^{\perp}$,故有

$$\langle x,\varepsilon_j\rangle=\langle x-a+a,\varepsilon_j\rangle=\langle a,\varepsilon_j\rangle=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\langle\varepsilon_k,\varepsilon_j\rangle$$

$$=(\langle\varepsilon_1,\varepsilon_j\rangle,\langle\varepsilon_2,\varepsilon_j\rangle,\cdots,\langle\varepsilon_n,\varepsilon_j\rangle)\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\langle x,\varepsilon_1\rangle\\\langle x,\varepsilon_2\rangle\\\vdots\\\langle x,\varepsilon_n\rangle\end{pmatrix}=G\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=G^{-1}\begin{pmatrix}\langle x,\varepsilon_1\rangle\\\langle x,\varepsilon_2\rangle\\\vdots\\\langle x,\varepsilon_n\rangle\end{pmatrix},$$

证毕.

注 若 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 为 M 的标准正交基,则 G 为单位阵,

$$a=Px=\sum_{k=1}^{n}\langle x,\varepsilon_k\rangle\varepsilon_k,$$

这说明了 x 关于标准正交系 $\{\varepsilon_n\}$ 的 Fourier 级数本质上是 x 在

$$\mathrm{span}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$$

上的投影的极限.

2. 最佳逼近的示例

例 4.6.1(最佳均方逼近多项式) 在 $[0,1]$ 上求最佳均方逼近函数 $x=e^t$ 的二次多项式.

解 记 $P_2([0,1])$ 为 $[0,1]$ 上次数 $\leqslant 2$ 的多项式全体,则 $P_2([0,1])$ 是 $L^2([0,1])$ 的一个完备子空间,$\{1,t,t^2\}$ 是 $P_2([0,1])$ 的一个基,其 Gram 矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\end{pmatrix}.$$

由

---

① 格拉姆(1850～1916 年),丹麦数学家.

$$\langle x,1\rangle=\int_0^1 e^t\mathrm{d}t=e-1,$$

$$\langle x,t\rangle=\int_0^1 te^t\mathrm{d}t=1,$$

$$\langle x,t^2\rangle=\int_0^1 t^2e^t\mathrm{d}t=e-2,$$

得 $x=e^t$ 的最佳均方逼近二次多项式

$$\begin{aligned}P(t)&=(1,t,t^2)G^{-1}\begin{pmatrix}e-1\\1\\e-2\end{pmatrix}\\&=(210e-570)t^2+(588-216e)t+39e-105\\&\approx 0.8392t^2+0.8511t+1.0130.\end{aligned}$$

例 4.6.2(最小二乘法)　对于相互独立的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 和随机变量 Y,有 n 组样本值

$$x_{ij},\quad y_i\quad (i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m,n>m)$$

求估计式

$$Y=\sum_{j=1}^m \beta_j X_j,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n\left(y_i-\sum_{j=1}^m\beta_j x_{ij}\right)^2$$

达到最小.

解　令

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad x_j=\begin{pmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\\vdots\\x_{nj}\end{pmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,m),$$

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)_{n\times m},$$

则原问题化为求 y 在

$$A=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_m\}\subset\mathbf{R}^n$$

中的最佳逼近.

由独立性,不妨设 $\{x_1,\cdots,x_m\}$ 为 A 的基,则 y 在 A 中的最佳逼近

$$a=\sum_{j=1}^m\beta_j x_j$$

的系数

$$\beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}=G^{-1}\begin{pmatrix}\langle y,x_1\rangle\\ \langle y,x_2\rangle\\ \vdots\\ \langle y,x_m\rangle\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1^{\mathrm T}x_1 & x_1^{\mathrm T}x_2 & \cdots & x_1^{\mathrm T}x_m\\ x_2^{\mathrm T}x_1 & x_2^{\mathrm T}x_2 & \cdots & x_2^{\mathrm T}x_m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_m^{\mathrm T}x_1 & x_m^{\mathrm T}x_2 & \cdots & x_m^{\mathrm T}x_m\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1^{\mathrm T}y\\ x_2^{\mathrm T}y\\ \vdots\\ x_m^{\mathrm T}y\end{pmatrix}$$

$$=(X^{\mathrm T}X)^{-1}X^{\mathrm T}y,$$

这与回归分析中所熟知的最小二乘估计的结论相同.

习 题 4.6

1. 在$[0,\pi]$上求 $x=\sin t$ 的最佳均方逼近二次多项式.

2. 在$[-1,1]$上求 $x=\frac{1}{1+t^2}$的最佳均方逼近二次多项式.

3. 在$[0,1]$上求 $x=e^t$ 的最佳均方逼近,使其在区间

$$\left(0,\frac{1}{3}\right),\quad\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\quad\left(\frac{2}{3},1\right)$$

上分别为常数.

4. 设 $Y,X_1,\cdots,X_n$ 是概率空间 Ω 上的随机变量,其 2 阶矩均存在,且 $X_1,\cdots,X_n$ 线性无关.求

$$X=\sum_{k=1}^{n}\beta_kX_k,$$

使得

$$E\left(Y-\sum_{k=1}^{n}\beta_kX_k\right)^2$$

达到最小.

4.7 Hilbert 空间的同构

1. 内积空间的同构

定义 4.7.1 设$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle_X)$,$(Y,\langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$为数域 $\mathbf{K}$ 上的内积空间,若存在线性同构映射 $T:X\to Y$,使得$\forall x,y\in X$,有

$$\langle Tx,Ty\rangle_Y=\langle x,y\rangle_X,$$

则称 T 为 X 到 Y 的内积同构映射,并称$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle_X)$与$(Y,\langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$内积同构.

到目前为止,我们在距离空间、线性空间、赋范空间和内积空间中已介绍了 4

种同构的概念，它们都是相应空间中的等价关系，下面我们通过表 4-2 来比较它们的异同.

表 4-2　不同空间的同构概念的比较

空　间	概　念	存在一一映射 $T:X\to Y$，使得	
距离空间	等距同构	$d(Tx,Ty)=d(x,y)$	
线性空间	线性同构	$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$	
赋范空间	拓扑同构		T,T^{-1}连续
内积空间	内积同构		$\langle Tx,Ty\rangle_Y=\langle x,y\rangle_X$

由于内积同构映射保持范数不变：

$$\|Tx\|=\sqrt{\langle Tx,Tx\rangle}=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\|x\|,$$

故 $\forall x,y\in X$，有

$$\|Tx-Ty\|=\|T(x-y)\|=\|x-y\|,$$

由此可知内积同构是一种等距同构，且 T,T^{-1} 均连续，从而内积同构也是一种拓扑同构. 因此，内积同构的空间，不仅代数结构相同，拓扑结构相同，而且向量的长度、两向量间的夹角都对应相同，在本质上可以看作是同一空间.

2. Hilbert 空间的同构

定理 4.7.1　n 维 Hilbert 空间与 $\mathbf{K}^n$ 内积同构.

证　设 H 是 n 维 Hilbert 空间，则 H 中有 n 个线性无关的向量，由 Schmidt 正交化过程，可将它们改造为标准正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 作 H 到 $\mathbf{K}^n$ 的线性映射 T：

$$Tx=(\langle x,e_1\rangle,\cdots,\langle x,e_n\rangle),$$

则 T 是一一映射，且由定理 4.4.2，有

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}=\langle Tx,Ty\rangle,$$

故 T 是 H 到 $\mathbf{K}^n$ 上的内积同构映射. 证毕.

定理 4.7.2　无限维可分 Hilbert 空间与 l^2 内积同构.

证　设 H 是无限维的可分 Hilbert 空间，则由定理 4.4.3，H 中有由可数个向量构成的标准正交基 $\{e_n\}$. $\forall x\in H$，令

$$Tx=(\langle x,e_1\rangle,\langle x,e_2\rangle,\cdots),$$

则由 Parseval 等式，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2=\|x\|^2<\infty,$$

故 $Tx\in l^2$，T 是 H 到 l^2 的线性映射. 首先，T 是单射，若对 $x,y\in H$，$\forall n\in\mathbf{N}$ 有

$$\langle x,e_n\rangle=\langle y,e_n\rangle,$$

则

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\langle y,e_k\rangle e_k=y;$$

其次，T 是满射，$\forall(a_1,a_2,\cdots)\in l^2$，令

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k,$$

则由引理 4.4.1，知级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k e_k$ 在 H 中收敛，故 $x\in H$；最后，再由

$$\langle Tx,Ty\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}=\langle x,y\rangle,$$

知 T 是 H 到 l^2 上的内积同构映射，证毕.

定理 4.7.2 表明，一切无限维的 Hilbert 空间，不管形式如何复杂，只要它是可分的，在实质上与 l^2 并无不同.

习 题 4.7

1. 设 X,Y 为同一数域上的两个内积空间，证明：满足条件

$$\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle,\quad\forall x,y\in X$$

的线性映射 $T:X\to Y$ 一定是单射.

2. 证明：若内积空间间的线性映射 $T:X\to Y$ 是保范的，即 $\forall x\in X$，

$$\|Tx\|=\|x\|,$$

则必是保内积的，即 $\forall x,y\in X$，

$$\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle.$$

3. 证明：$L^2([a,b])$ 与 l^2 内积同构.

第 5 章　有界线性算子的基本理论

线性算子理论是泛函分析的核心内容，也是泛函分析应用于各个领域的主要工具. 工程技术中的实际问题只要转化为某空间上的算子或算子方程，就可以利用泛函分析的方法来加以研究. 线性算子理论是有限维线性空间中线性变换理论向无限维线性空间的自然延伸，如果说 Hilbert 空间理论是无限维空间上的几何学的话，那么线性算子理论就是无限维空间上的代数学. 本章主要介绍有界线性算子的基本概念、基本性质和基本定理，并介绍对偶空间、对偶算子、弱收敛等概念.

5.1　线性算子的有界性与连续性

1. 线性算子与线性泛函

(1) 线性算子的概念

定义 5.1.1　设 X,Y 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，$T:X\to Y$ 称为从 X 到 Y 的**线性算子**，若 $\forall \alpha,\beta\in\mathbf{K}, x,y\in X$，有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$$

当 $Y=\mathbf{K}$ 时，称 T 为**线性泛函**.

例 5.1.1　若映射 $I:X\to X$ 满足

$$I(x)=x,\qquad \forall x\in X,$$

则称 I 为 X 上的**单位算子(恒等算子)**. 单位算子是线性算子.

例 5.1.2　若映射 $O:X\to Y$ 满足

$$Ox=0,\qquad \forall x\in X,$$

则称 O 为**零算子**. 零算子是线性算子.

例 5.1.3　若映射 $T:X\to X$ 满足

$$Tx=\alpha x,\qquad \forall x\in X,$$

其中 $\alpha\in\mathbf{K}$，则称 T 为 X 上的**纯量算子**. 纯量算子是线性算子.

(2) 线性算子的零空间与值域

定义 5.1.2　设 $T:X\to Y$ 是线性算子，称

$$T^{-1}(\{0\})=\{x\in X:Tx=0\}$$

为 T 的**零空间**(null space)或**核**(kernel)，记作 $N(T)$或 $\ker(T)$；称

$$T(X)=\{y\in Y: y=Tx, x\in X\}$$

为 T 的值域(range),记作 $R(T)$.

注 对线性算子 T,一定有 $0\in\ker(T)$,因为

$$T0=T(0+0)=T0+T0=2T0,$$

$$T0=0.$$

线性算子 T 的零空间与值域可以用来判定 T 的属性.

命题 5.1.1 设 $T: X\to Y$ 是一个线性算子,则

1° T 是单射的充分必要条件是:

$$\ker(T)=\{0\};$$

2° T 是满射的充分必要条件是:

$$R(T)=Y.$$

证 1° 必要性:$\forall x\in\ker(T)$,则有

$$Tx=0,$$

又 $T0=0$,由 T 是单射,知 $x=0$,从而有 $\ker(T)=\{0\}$.

充分性:设有 $x,y\in X$,使得 $Tx=Ty$,则由

$$T(x-y)=Tx-Ty=0$$

及 $\ker(T)=\{0\}$,得 $x-y=0, x=y$.

2° 由定义 1.2.2 可以直接看出. 证毕.

2. 有界性与连续性

(1) 有界性与连续性的概念

在第 2 章中我们已经定义了一般算子的连续性概念,下面我们来看线性算子的有界性概念.

定义 5.1.3 设 X,Y 是赋范空间,$T: X\to Y$ 是线性算子. 若 $\exists M>0$,使得 $\forall x\in X$,有

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|,$$

则称 T 为**有界线性算子**,否则称为**无界线性算子**.

例 5.1.4 单位算子、零算子都是有界线性算子.

例 5.1.5 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间,则从 H 到 M 的正交投影算子 P 是有界线性算子.

证 由式(4.5.1),有

$$\|Px\|\leqslant\|x\|,$$

故 P 是有界线性算子.

例 5.1.6 $[a,b]$上的连续函数的积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$$

是$C([a,b])$上的有界线性泛函.

证　显然,f是从$C([a,b])$到$\mathbf{K}$的线性泛函,且在$C([a,b])$的默认范数$\|\cdot\|_\infty$下,

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b \max_{t\in[a,b]}|x(t)|\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b \|x\|_\infty\mathrm{d}t=(b-a)\|x\|_\infty,$$

故f有界.

例 5.1.7　将$C^1([0,1])$看作$C([0,1])$的子空间,则微分算子

$$T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}:C^1([0,1])\to C([0,1])$$

是一个无界线性算子.

证　$\forall x,y\in C^1([0,1]),\forall\alpha,\beta\in\mathbf{K}$,有

$$T(\alpha x+\beta y)=(\alpha x+\beta y)'=\alpha x'+\beta y'=\alpha Tx+\beta Ty,$$

故T是一个线性算子. $\forall M>0$,取$x=t^{M+1}$,则有

$$\|x\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|t^{M+1}|=1,$$

由于

$$\|Tx\|_\infty=\|(M+1)t^M\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|(M+1)t^M|$$
$$=M+1>M\|x\|_\infty,$$

故T是无界的.

(2) 有界性与连续性的性质

定理 5.1.1　设X,Y是赋范空间,$T:X\to Y$是线性算子,则T有界$\Leftrightarrow T$将X中的有界集映为Y中的有界集.

证　必要性:设A为X中的有界集,则$\exists L>0$,使得

$$\|x\|\leqslant L,\qquad\forall x\in A;$$

再由T有界,$\exists M>0$,使得

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|\leqslant LM,\qquad\forall x\in A,$$

故$T(A)$为Y中的有界集.

充分性:由于集合

$$\left\{\frac{1}{\|x\|}x:x\in X\backslash\{0\}\right\}$$

在单位球面上,故是X中的有界集,从而有

$$\left\{T\left(\frac{1}{\|x\|}x\right):x\in X\backslash\{0\}\right\}$$

是 Y 中的有界集，于是 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in X\backslash\{0\}$，有

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\left\|\frac{1}{\|x\|}Tx\right\|=\left\|T\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\|\leqslant M,$$

[illegible]

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|,$$

显然此式当 $x=0$ 时也成立，故 T 有界. 证毕.

注 有界线性算子将有界集映为有界集，这就是有界性一词的由来.

定理 5.1.2 设 X,Y 是赋范空间，$T:X\to Y$ 是一个线性算子，若 T 在某一点 $x_0\in X$ 连续，则 T 在 X 上连续.

证 $\forall x\in X,\{x_n\}\subset X$，若 $x_n\to x$，则有

$$x_n-x+x_0\to x_0\quad(n\to\infty).$$

此时，由 T 的线性性和在 x_0 处的连续性，有

$$Tx_n-Tx=T(x_n-x)=T(x_n-x+x_0)-Tx_0\to 0,$$

故 $Tx_n\to Tx(n\to\infty)$，证毕.

由定理 5.1.2，要验证一个线性算子是否连续，只需验证它在一点(例如，0 点)的连续性即可.

(3) 有界性与连续性的关系

定理 5.1.3 设 X,Y 是赋范空间，$T:X\to Y$ 是一个线性算子，则 T 连续 $\Leftrightarrow T$ 有界.

证 必要性：若 T 连续，则由 T 在 0 点的连续，知

$$Tx\to T0=0\quad(x\to 0),$$

从而对 $\varepsilon=1$，$\exists\delta>0$，使当 $\|x\|<\delta$ 时，有

$$\|Tx\|<1.$$

$\forall x\in X$，若 $x\neq 0$，则由

$$\left\|\frac{\delta}{2\|x\|}x\right\|=\frac{\delta}{2\|x\|}\|x\|=\frac{\delta}{2}<\delta,$$

得

$$\left\|T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right)\right\|=\left\|\frac{\delta}{2\|x\|}Tx\right\|=\frac{\delta\|Tx\|}{2\|x\|}<1,$$

[illegible]

$$\|Tx\|\leqslant\frac{2}{\delta}\|x\|,$$

此式当 $x=0$ 时也成立，故 T 有界.

充分性:若 T 有界,则由 $x_n \to x$ 可得

$$\| Tx_n - Tx \| = \| T(x_n - x) \| \leqslant M \| x_n - x \| \to 0,$$

即 $Tx_n \to Tx$,证毕.

注　定理 5.1.3 说明了线性算子有界性与连续性的等价性,这就是为什么在泛函分析中只提有界线性算子而不提连续线性算子的原因.

习　题　5.1

1. 证明纯量算子是有界线性算子.

2. 设 X,Y 是赋范空间,$T:X\to Y$ 是有界线性算子,证明:T 的零空间 $\ker(T)$ 是 X 的闭子空间.

3. 设 $B(\mathbf{R})$ 为 $\mathbf{R}$ 上的实值有界函数空间,给定 $\Delta>0$,$\forall x\in B(\mathbf{R})$,定义时延算子 $T:B(\mathbf{R})\to B(\mathbf{R})$ 为

$$(Tx)(t) = x(t-\Delta).$$

在上确界范数下,T 是线性有界的吗?

4. 证明:$[a,b]$上的连续函数的积分

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t$$

在范数

$$\| x \|_1 = \int_a^b | x(t) | \mathrm{d}t$$

下也是 $C([a,b])$上的有界线性泛函.

5.2　算子范数与算子空间

1. 算子范数

(1) 算子范数的定义

定义 5.2.1　设 X,Y 是赋范空间,$T:X\to Y$ 是有界线性算子,令

$$\| T \| = \sup_{x\neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|}, \tag{5.2.1}$$

则称数 $\| T \|$ 为 T 的**算子范数**,简称为**范数**.

注　由有界线性算子的定义,$\| T \|$ 是一个有限数.

命题 5.2.1　设 $T:X\to Y$ 是有界线性算子,则

$$\| T \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Tx \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \|. \tag{5.2.2}$$

证　由

$$\| T \| = \sup_{x\neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} = \sup_{x\neq 0} \left\| \frac{1}{\| x \|} Tx \right\| = \sup_{x\neq 0} \left\| T\left(\frac{1}{\| x \|} x\right) \right\|,$$

得

$$\|T\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

$$\leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|,$$

故式中“$\leqslant$”均可改为等号,证毕.

命题 5.2.1 实际上给出了算子范数的两个等价定义,以后会经常用到.

(2) 算子范数的意义

从几何上看,$\forall x\in X(x\neq 0)$,$\alpha\in\mathbb{K}(\alpha\neq 0)$,有

$$\frac{\|T(\alpha x)\|}{\|\alpha x\|} = \frac{\|\alpha Tx\|}{\|\alpha x\|} = \frac{|\alpha|\ \|Tx\|}{|\alpha|\ \|x\|} = \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

故$\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$是 T 在 x 方向上的伸缩率,从而 $\|T\|$ 代表了 T 在所有方向上的最大伸缩率;

从代数上看,$\forall x\in X$,有

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\ \|x\|, \tag{5.2.3}$$

而对满足 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$ 的 M,又有

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant M,$$

故算子范数是满足 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$ 的所有 M 的下确界.

(3) 算子范数的求法

除了直接使用定义以外,求算子 T 的范数通常可以分为两个步骤:

1° 找到一尽可能小的 M,使得

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|,$$

由此,可得 $\|T\|\leqslant M$;

2° 选取一单位向量 $x_0\in X$,使得

$$\|Tx_0\| = M,$$

由此,可得

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \geqslant \|Tx_0\| = M,$$

合之,即得 $\|T\| = M$.

下面,我们来看两个具体例子.

例 5.2.1 对纯量算子

$$Tx = \alpha x, \qquad \forall x\in X,$$

$\|T\| = |\alpha|$,特别地,

$$\|I\| = 1.$$

证　由算子范数的等价定义，

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha x\|$$
$$= \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \, \|x\| = |\alpha|.$$

例 5.2.2　对积分算子

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(s)\mathrm{d}s,$$

1° 若把 T 看作 $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ 的算子时，

$$\|T\| = b-a;$$

2° 若把 T 看作 $(L([a,b]), \|\cdot\|_1) \to (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ 的算子时，

$$\|T\| = 1.$$

证　1° $\forall x \in C([a,b])$，有

$$\|Tx\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |x(s)| \mathrm{d}s$$
$$= \int_a^b |x(s)| \mathrm{d}s \leqslant \int_a^b \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \mathrm{d}s$$
$$= \int_a^b \|x\|_\infty \mathrm{d}s = (b-a)\|x\|_\infty,$$

故 $\|T\| \leqslant b-a$；取

$$x_0(t) = 1,$$

则

$$\|x_0\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |1| = 1,$$
$$\|Tx_0\|_\infty = b-a,$$

故 $\|T\| = b-a$.

2° $\forall x \in L([a,b])$，有

$$\|Tx\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_a^b |x(s)| \mathrm{d}s = \|x\|_1,$$

故 $\|T\| \leqslant 1$；取

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a},$$

则

$$\|x_0\|_1 = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = 1,$$
$$\|Tx_0\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t \frac{1}{b-a}\mathrm{d}s\right| = \max_{t\in[a,b]} \left|\frac{t-a}{b-a}\right| = 1,$$

故 $\|T\| = 1$.

2. 有界线性算子空间

定义 5.2.2 设 X,Y 是数域 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间，记 $B(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的有界线性算子的集合. $\forall x\in X,\alpha\in\mathbf{K}$，在 $B(X,Y)$ 中定义线性运算

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x,$$
$$(\alpha T)x=\alpha(Tx),$$

则 $B(X,Y)$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，称为**有界线性算子空间**.

注 记 $B(X,X)=B(X)$.

定理 5.2.1 $B(X,Y)$ 按算子范数成为一个赋范空间.

证 由于 $B(X,Y)$ 是一个线性空间，故只需验证算子范数满足 3 条范数公理.

1° 正定性：显然，$\|T\|\geqslant 0$；若 $\|T\|=0$，则对 $\forall x\in X$，有

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|=0,$$

从而有 $Tx\equiv 0$，$T=O$；若 $T=O$，则有

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|=1}\|0\|=0,$$

故

$$\|T\|=0\iff T=O.$$

2° 绝对齐次性：$\forall\alpha\in\mathbf{K}$，有

$$\|\alpha T\|=\sup_{\|x\|=1}\|\alpha Tx\|=|\alpha|\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=|\alpha|\,\|T\|,$$

3° 三角不等式：$\forall T_1,T_2\in B(X,Y)$，有

$$\begin{aligned}\|(T_1+T_2)x\|&=\|T_1x+T_2x\|\leqslant\|T_1x\|+\|T_2x\|\\&\leqslant\|T_1\|\,\|x\|+\|T_2\|\,\|x\|\\&=(\|T_1\|+\|T_2\|)\|x\|,\end{aligned}$$

故

$$\|T_1+T_2\|\leqslant\|T_1\|+\|T_2\|.$$

3. 算子列的依算子范数收敛

有界线性算子空间在算子范数下的收敛性，就是依算子范数收敛.

定义 5.2.3 设 X,Y 是赋范空间，$B(X,Y)$ 中的算子列 $\{T_n\}$ 称为**依算子范数收敛**，若 $\exists T\in B(X,Y)$，使得

$$\|T_n-T\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

记作 $T_n\to T(n\to\infty)$.

定理 5.2.2 设 $\{T_n\}\subset B(X,Y)$，$T\in B(X,Y)$，则 $T_n\to T\Leftrightarrow$ 在 X 的任一有界集上，T_nx 一致收敛到 Tx.

证 必要性：设 $A\subset X$ 是一有界集，则 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in X$，有

$$\|x\| \leqslant M,$$

再由 $T_n \to T$，知 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)\in \mathbf{N}$，使当 $n>N$ 后，有

$$\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{M},$$

从而有

$$\|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)x\| \leqslant \|T_n - T\|\,\|x\| \leqslant M\|T_n - T\| < \varepsilon.$$

故在 A 上有 $T_n x \rightrightarrows Tx$.

充分性：X 中的单位球面 S 是一个有界集，故 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbf{N}$，使得对 $\forall x\in S$，只要 $n>N$，就有

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon.$$

此时，有

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1}\|(T_n - T)x\| = \sup_{\|x\|=1}\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon,$$

故 $T_n \to T$. 证毕.

注　基于此，也称算子列的依算子范数收敛为一致收敛.

定理 5.2.3　若 Y 是 Banach 空间，则 $B(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

证　设 $\{T_n\}$ 是 $B(X,Y)$ 中的 Cauchy 列，则当 $m,n\to\infty$ 时，有

$$\|T_m - T_n\| \to 0.$$

此时，$\forall x\in X$，有

$$\|(T_m - T_n)x\| \leqslant \|T_m - T_n\|\,\|x\| \to 0, \tag{5.2.4}$$

故 $\{T_n x\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列，由 Y 的完备性，知 $\exists y\in Y$，使得

$$T_n x \to y.$$

定义算子 $T: X\to Y$ 为

$$Tx = y,$$

则 T 是一个线性算子，下证 $T_n \to T$.

在式(5.2.4)中令 $m\to\infty$，有

$$\|(T-T_n)x\| \leqslant \varlimsup_{m\to\infty}\|T_m - T_n\|\,\|x\|,$$

故有

$$\|T_n - T\| \leqslant \varlimsup_{m\to\infty}\|T_m - T_n\|,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|T_n - T\| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\|T_m - T_n\| = 0,$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n - T\| = 0.$$

最后，由 T_n 和 $T-T_n$ 的有界性，得

$$T = (T - T_n) + T_n \in B(X,Y),$$

故 $B(X,Y)$ 是完备的. 证毕.

习 题 5.2

1. 定义 $T: C([0,1]) \to C([0,1])$ 为

$$(Tx)(t) = t\int_0^1 x(s)\mathrm{d}s,$$

证明: T 是 $C([0,1])$ 上的有界线性算子并求 $\|T\|$.

2. $\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$, 定义

$$T_n x = (x_1, x_2, \cdots x_n, 0, \cdots),$$

证明: $T_n \in B(l^2)$, 并求 $\|T_n\|$.

3. 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交基, 定义如下的算子:

$$T\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{k+1},$$

证明: T 是 H 上的有界线性算子并求 $\|T\|$.

4. 设 $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$, 证明: $S \cdot T \in B(X,Z)$, 且

$$\|S \cdot T\| \leqslant \|S\| \, \|T\|.$$

5.3 有限维赋范空间上的线性算子

1. 线性算子的有界性

定理 5.3.1 设 X 是有限维赋范空间, Y 是任意的赋范空间, $T: X \to Y$ 是线性算子, 则 T 有界.

证 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为 n 维赋范空间, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 X 上的一个基, 则 $\forall x \in X$, 有

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

令

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $\|x\|_2$ 是 X 上的一个范数, 且

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k Te_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k Te_k\| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, \|Te_k\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\|x\|_2,
\end{aligned}$$

其中

$$C = \left(\sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由定理 3.4.2,有限维线性空间中的任意两个范数等价,故有

$$\|x\|_2 \leqslant C'\|x\|,$$

从而有

$$\|Tx\| \leqslant CC'\|x\|,$$

因而 T 是有界的.

作为定理 5.3.1 的一个特例,$\mathbf{R}^n$ 中的线性函数都是连续的,这就是为什么在高等数学中没有线性函数有界性这一概念的原因.

2. 线性算子空间与矩阵空间的同构

(1) 由矩阵确定的算子

在线性代数中,我们知道矩阵是研究有限维线性空间上的线性变换的有力工具,在泛函分析中也同样如此.

设 X,Y 是数域 $\mathbf{K}$ 上的有限维空间,

$$\dim X = n, \qquad \dim Y = m,$$

$T:X\to Y$ 是线性算子,$\{e_1,\cdots,e_n\}$是 X 的基,$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m\}$是 Y 的基,且

$$Te_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varepsilon_i \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{5.3.1}$$

记 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,并定义

$$T(e_1,e_2,\cdots,e_n) = (Te_1,Te_2,\cdots,Te_n),$$

则用矩阵符号来表示(5.3.1),就有

$$\begin{aligned} T(e_1,e_2,\cdots,e_n) &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)\mathbf{A}, \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

此时,$\forall x\in X$,记

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \qquad Tx = \sum_{i=1}^{m} y_i\varepsilon_i,$$

则由

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} x_j Te_j = (Te_1,Te_2,\cdots,Te_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \varepsilon_i = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{5.3.3}$$

故 T 完全由矩阵 $\mathbf{A}$ 所确定.

将 $m \times n$ 的矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 看作 Euclid 空间 $\mathbf{K}^{m\times n}$ 的元素

$$(a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}),$$

令 $S: B(X,Y) \to \mathbf{K}^{m\times n}$ 为

$$S(T) = \mathbf{A}, \quad \forall T \in B(X,Y),$$

则 S 是线性算子空间 $B(X,Y)$ 与矩阵空间 $\mathbf{K}^{m\times n}$ 的线性同构映射, $B(X,Y)$ 与 $\mathbf{K}^{m\times n}$ 线性同构.

基于上述原因,我们可将对应于矩阵 $\mathbf{A}$ 的线性算子径记为 A.

(2) 由矩阵确定的算子的范数

定理 5.3.2 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbf{K}^{m\times n}$, $A: \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ 定义为

$$Ax = \mathbf{A}x, \quad \forall x = (x_i)_{n\times 1} \in \mathbf{K}^n,$$

则 A 是一个线性算子,且若在 $\mathbf{K}^n$ 中使用范数

$$\| x \|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} | x_j |^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} | x_j |, & p = \infty, \end{cases}$$

则相应地有算子范数

1° $\| A \|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} | a_{ij} |$; (5.3.4)

2° $\| A \|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$; (5.3.5)

3° $\|A\|_2 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sqrt{|\lambda_j|}$, (5.3.6)

其中 $\lambda_j (j=1,\cdots,n)$ 为 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值.

注 特别的,若

$$A:(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_2)$$

所对应的矩阵 A 是对称阵,A 的特征值为 $\lambda_j (j=1,\cdots,n)$,则

$$\|A\|_2 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\lambda_j|. \tag{5.3.7}$$

证 1° 记

$$a = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,$$

则由式(5.3.3),

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{m}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}||x_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |x_j|\Big(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\Big) \\ &\leqslant a\sum_{j=1}^{n} |x_j| = a\|x\|_1,\end{aligned}$$

故 $\|A\|_1 \leqslant a$;设当 $j=j_0$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ 取到最大值 a,记

$$x_0 = (\underbrace{0,\cdots,0}_{j_0-1},1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

则 $\|x_0\|_1 = 1$,

$$\|Ax_0\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij_0}| = a,$$

故 $\|A\| = a$.

2° 记

$$b = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

则由式(5.3.3),

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant m}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j| \\ &= \Big(\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\Big)\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j|\Big)\end{aligned}$$

$$= b \| x \|_\infty ,$$

故 $\| A \|_\infty \leqslant b$；设当 $i = i_0$ 时，$\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$ 取到最大值 b，记

$$x_0 = (\mathrm{sgn}\, a_{i_0 1}, \mathrm{sgn}\, a_{i_0 2}, \cdots, \mathrm{sgn}\, a_{i_0 n})^{\mathrm{T}},$$

其中

$$\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

为 x 的符号函数，则当 A 不为零矩阵时，$\| x_0 \|_\infty = 1$，

$$\| Ax_0 \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,\mathrm{sgn}\, a_{i_0 j} \right| = \sum_{j=1}^{n} | a_{i_0 j} | = b,$$

故有 $\| A \|_\infty = b$，而当 A 为零矩阵时，式(5.3.5)显然成立. 证毕.

3° 仅证式(5.3.7). 由于 A 是对称阵，故 A 有 n 个两两正交的单位特征向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，分别对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，不妨设

$$| \lambda_1 | = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} | \lambda_j |.$$

$\forall x \in \mathbf{R}^n$，有 $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$，故

$$\begin{aligned} \| Ax \|_2^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A e_j \right\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j e_j \right\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \| \alpha_j \lambda_j e_j \|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} | \lambda_j |^2 \| \alpha_j e_j \|_2^2 \\ &\leqslant | \lambda_1 |^2 \sum_{j=1}^{n} \| \alpha_j e_k \|_2^2 = | \lambda_1 |^2 \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\|_2^2 \\ &= | \lambda_1 |^2 \| x \|_2^2, \end{aligned}$$

从而有 $\| Ax \|_2 \leqslant |\lambda_1| \| x \|_2$，$\| A \|_2 \leqslant |\lambda_1|$；又对单位特征向量 e_1，

$$\| Ae_1 \|_2 = \| \lambda_1 e_1 \|_2 = | \lambda_1 |,$$

故

$$\| A \|_2 = | \lambda_1 | = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} | \lambda_k |.$$

证毕.

例 5.3.1 设线性算子 $A: (\mathbf{R}^2, \| \cdot \|_2) \to (\mathbf{R}^2, \| \cdot \|_2)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求算子 A 的范数.

解 A 为对称阵，令

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2-1$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-3)=0,$$

得 $\lambda=1,\lambda=3$，故 A 有特征值为 1,3，再由式(5.3.7)，有

$$\|A\|_2=\max\{1,3\}=3.$$

习 题 5.3

1. 定义 $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为

$$Tx=(x_2,x_1)^{\mathrm{T}},\qquad \forall x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2,$$

证明 T 为有界线性算子并求 $\|T\|$.

2. 设线性算子 $A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 所对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix},$$

求算子 A 的范数.

3. 设线性算子 $A:(\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_1)\to(\mathbf{R}^m,\|\cdot\|_\infty)$所对应的矩阵为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，证明：

$$\|A\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}|a_{ij}|.$$

5.4 Banach 空间上的有界线性算子的性质

1. 开映射定理

定义 5.4.1 设 X,Y 是距离空间，映射 $T:X\to Y$ 称为开映射，若 T 将 X 中的开集映为 Y 中的开集.

由定理 2.3.4 知，在连续映射下，开集的原像集是开集，但开集的像集不一定是开集，例如 $y=\sin x$ 将$(0,2\pi)$映到$[-1,1]$，故连续映射不一定是开映射.

下面的定理给出了 Banach 空间上的有界线性算子是开映射的条件.

定理 5.4.1(开映射定理) 设 X,Y 是 Banach 空间，$T\in B(X,Y)$. 若 T 是满射，则 T 是开映射.

定理的证明基于 Baire 纲定理，有兴趣的读者可参见文献[2].

2. 逆算子定理

定理 5.4.2(逆算子定理) 设 X,Y 是 Banach 空间，$T\in B(X,Y)$. 若 T 是双射，则 T 的逆算子存在且 $T^{-1}\in B(Y,X)$.

证 T 是双射，故 T^{-1}存在；由 T 是单射，知 $\ker(T)=\{0\}$，故由

$$T\{T^{-1}(ax+by)-aT^{-1}x-bT^{-1}y\}=0$$

知

$$T^{-1}(ax+by)=aT^{-1}x+bT^{-1}y,$$

从而有 T^{-1} 是线性算子；由 T 是满射，知 T 是开映射，故任给 X 的开子集 U，$T(U)$ 是 Y 中的开集，再由

$$(T^{-1})^{-1}(U)=T(U)$$

和定理 2.3.4，知 T^{-1} 连续，故 $T^{-1}\in B(Y,X)$. 证毕.

对算子 $T:X\to Y$，如果我们知道算子方程

$$Tx=y$$

解的存在性与唯一性，我们还关心解的稳定性问题，即当 y 在 Y 中有微小变化时，相应的解 $x=T^{-1}(y)$ 在 X 中是否只有微小变化，反映在算子 T 上，就是逆算子 T^{-1} 是否是连续的. 下面我们来看一个具体例子.

例 5.4.1(线性微分方程解的稳定性问题) 设 $a_1,\cdots,a_k\in C([a,b])$，考察 k 阶线性微分方程

$$\begin{cases}x^{(k)}+a_1x^{(k-1)}+\cdots+a_kx=y,\\ x\,|_{t=a}=x'\,|_{t=a}=\cdots=x^{(k)}\,|_{t=a}=0.\end{cases}\tag{5.4.1}$$

由微分方程的理论知，$\forall\, y\in C([a,b])$，方程(5.4.4)存在唯一的 k 阶连续可导解 $x=x(t)$，证明：解 x 连续地依赖于 y.

证 k 阶连续可导函数空间 $C^k([a,b])$ 在范数

$$\|x\|=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(i)}(t)|$$

下是一个 Banach 空间，令

$$M=\{x\in C^k([a,b]):x(a)=x'(a)=\cdots=x^{(k)}(a)=0\},$$

则 M 是 $C^k([a,b])$ 的一个闭子空间，从而也是个 Banach 空间(定理 3.3.2). 定义映射 $T:M\to C([a,b])$ 为

$$Tx=x^{(k)}+a_1x^{(k-1)}+\cdots+a_kx,\qquad \forall\, x\in M,$$

则 T 是一个线性算子. 由于 $a_1,\cdots,a_k\in C([a,b])$，故

$$\max_{t\in[a,b]}\{1,\,|a_1(t)|,\cdots,\,|a_k(t)|\}=L$$

是有限数，且

$$\begin{aligned}\|Tx\|_\infty&=\max_{t\in[a,b]}|x^{(k)}(t)+a_1(t)x^{(k-1)}(t)+\cdots+a_k(t)x(t)|\\&\leqslant\max_{t\in[a,b]}(|x^{(k)}(t)|+|a_1(t)x^{(k-1)}(t)|+\cdots+|a_k(t)x(t)|)\\&\leqslant L\max_{t\in[a,b]}(|x^{(k)}(t)|+|x^{(k-1)}(t)|+\cdots+|x(t)|)\\&\leqslant L\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(i)}(t)|=L\|x\|_\infty,\end{aligned}$$

故 T 有界. 又由(5.4.4)解的存在性与唯一性，知 T 是双射，故由逆算子定理，T^{-1} 有界，故(5.4.4)的解 x 连续地依赖于 y.

3. 闭图像定理

$\mathbf{R}^2$ 的曲线 $y=f(x)$ 的图像是点 $(x,f(x))$ 的轨迹，仿照 $\mathbf{R}^2$，我们可以在一般的赋范空间中定义算子图像的概念.

定义 5.4.2　设 X,Y 是赋范空间，$T:X\to Y$ 是算子，则 $X\times Y$ 的子集

$$\{(x,Tx):x\in X\}$$

称为算子 T 的图像(graph)，记作 $G(T)$.

定义 5.4.3　设 X,Y 是赋范空间，算子 $T:X\to Y$ 称为闭算子，若 T 的图像 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 的闭子集.

定理 5.4.3(判别定理)　设 X,Y 是赋范空间，$T:X\to Y$ 是线性算子，则 T 是闭算子的充分必要条件是：由 $x_n\to x,Tx_n\to y(n\to\infty)$，可推出

$$y=Tx.$$

证　必要性：由 $x_n\to x,Tx_n\to y$，得

$$(x_n,Tx_n)\to(x,y)\quad(n\to\infty);$$

由 $G(T)$ 闭，得 $(x,y)\in G(T)$，从而有 $y=Tx$.

充分性：$\forall(x,y)\in G(T)'$，则 $\exists(x_n,Tx_n)\in G(T)$，使得

$$(x_n,Tx_n)\to(x,y),$$

而在积范数下这与 $x_n\to x,Tx_n\to y$ 等价，从而有 $y=Tx$，

$$(x,y)=(x,Tx)\in G(T),$$

故 $G(T)$ 闭. 证毕.

定理 5.4.4(闭图像定理)　设 X,Y 是 Banach 空间，映射 $T:X\to Y$ 是线性算子，若 T 是闭算子，则 T 为有界算子.

证　X,Y 是 Banach 空间，故 $X\times Y$ 是 Banach 空间. 由于 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 的闭子空间，故 $G(T)$ 也是 Banach 空间. 定义 $P:G(T)\to X$ 为

$$P(x,Tx)=x,$$

则 P 是一一对应的线性映射，且是有界的：

$$\|P(x,Tx)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|_1,$$

故由逆算子定理，P^{-1} 是连续的. 又

$$\begin{aligned}\|Tx\|&\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|_1\\&=\|P^{-1}(x)\|_1\leqslant\|P^{-1}\|\,\|x\|,\end{aligned}$$

从而得 T 是有界的.

注　定理中的完备性要求是必需的，一般的赋范空间间的闭线性算子不一定是有界算子.

例 5.4.2　将 $C^1([0,1])$ 看作 $C([0,1])$ 的子空间，则由例 5.1.7，知微分算子

$$T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}:C^1([0,1])\to C([0,1])$$

是一个无界线性算子,下证其为闭算子.

设有$\{x_n\}\subset C^1([0,1])$,使得$x_n\to x$,$Tx_n\to y$.由于$(C([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$中点列的收敛等价于函数列的一致收敛,故

$$(Tx_n)(t)\rightrightarrows y(t),$$

从而由定理 1.5.3,在等式

$$x_n(t)-x_n(0)=\int_0^t x'_n(s)\mathrm{d}s$$

两边同时令$n\to\infty$,得

$$x(t)-x(0)=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s,$$

从而有

$$Tx=x'(t)=y(t)=y,$$

故由判别定理,知T为闭算子.

例 5.4.2 中的闭算子不为有界算子,究其原因,在于$C^1([0,1])$在$C([0,1])$的范数下不是一个 Banach 空间.

习 题 5.4

1. 证明:Banach 空间X上的非零有界线性泛函是开映射.
2. 设X,Y是 Banach 空间,$T\in B(X,Y)$.若T是双射,证明:$\exists a,b>0$,使得$\forall x\in X$,有
$$a\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant b\|x\|.$$
3. 设X,Y是赋范空间,$T:X\to Y$是闭线性算子,证明:$\ker(T)$是X的闭子空间.
4. 设H是 Hilbert 空间,线性映射$T:H\to H$满足
$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle,\qquad\forall x,y\in H$$
证明:T是H上的有界线性算子.

5.5 一致有界原理及其应用

1. 一致有界原理

在实际应用中,我们处理的算子常常不止一个,而是一族,这就需要讨论算子族的一致有界性.

定义 5.5.1 设X,Y是赋范空间,$F\subset B(X,Y)$.算子族F称为一致有界的,若$\{\|T\|:T\in F\}$为有界集,即

$$\sup_{T\in F}\|T\|<\infty.$$

定理 5.5.1(一致有界原理)　设 X 是 Banach 空间,Y 是赋范空间,算子族 $F\subset B(X,Y)$. 若 $\forall x\in X$,有

$$\sup_{T\in F}\|Tx\|=M(x)<\infty,$$

则算子族 F 一致有界.

证　令

$$A_n=\{x\in X:\sup_{T\in F}\|Tx\|\leqslant n\},$$

则

$$A_n=\bigcap_{T\in F}T^{-1}[\bar{B}_n(0)]$$

为闭集,且

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

由 Baire 纲定理,非空的完备空间是第二纲集,故必有一 A_m 含一内点 a,否则对所有 A_k 均有

$$(\bar{A}_k)^{\circ}=(A_k)^{\circ}=\varnothing,$$

X 为第一纲集.

设有 $r>0$ 使得 $\bar{B}_r(a)\subset A_m$,则 $\forall x\in X$, $\|x\|=1$,有

$$\|Tx\|=\frac{1}{r}\|T(a+rx)-Ta\|\leqslant\frac{1}{r}(\|T(a+rx)\|+\|Ta\|)\leqslant\frac{2m}{r},$$

从而有

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\leqslant\frac{2m}{r},$$

$$\sup_{T\in F}\|T\|\leqslant\frac{2m}{r}<\infty.$$

证毕.

一致有界原理可以改写为更为直观的共鸣定理.

定理 5.5.2(共鸣定理)　设 X 是 Banach 空间,Y 是赋范空间,若算子族 $F\subset B(X,Y)$不是一致有界的,即

$$\sup_{T\in F}\|T\|=\infty,$$

则 $\exists x_0\in X$,使得

$$\sup_{T\in F}\|Tx_0\|=\infty.$$

注　此时称 x_0 为算子族 F 的共鸣点.

2. 一致有界原理的应用

在实际应用中，我们通常利用一致有界原理来判定某些有界性问题，利用共鸣定理来判定某些发散性问题，解决问题的关键在于能否构造出一个合适的 Banach 空间上的有界线性算子族.

(1) 有界性问题

例 5.5.1 设实数列 $\{a_k\}$ 对任何满足 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$ 的实数列 $\{b_k\}$，都有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| < \infty,$$

证明：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty.$$

证 $\forall x=(b_1,b_2,\cdots)\in l^2$，令 $T_n: l^2 \to l^1$ 为

$$T_n x = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n, 0, \cdots),$$

则有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \| T_n x \|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| < \infty,$$

故由一致有界原理，$\{T_n\}$ 一致有界. 下面来计算 $\| T_n \|$.

因为

$$\| T_n x \|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \| x \|_2,$$

故有 $\| T_n \| \leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$，取

$$x_0 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots),$$

则 $\| x_0 \|_2 = 1$，

$$\| T_n x_0 \|_1 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \| (a_1 a_1, \cdots, a_n a_n, 0, \cdots) \|_1$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

从而有

$$\| T_n \| = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \| T_n \| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(2) 发散性问题

例 5.5.2(Fourier 级数的发散性问题)　在实 $C([-\pi,\pi])$ 中，$\forall x \in C([-\pi,\pi])$，$x$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{5.5.1}$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, \cdots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

证明：给定 $t_0 \in [-\pi,\pi]$，$\exists x \in C([-\pi,\pi])$，使得 x 的 Fourier 级数(5.5.1)在 t_0 处发散.

证　仅对 $t_0 = 0$ 证明. $\forall x \in C([-\pi,\pi])$，$x$ 在 0 处的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{5.5.2}$$

令 $T_n : C([-\pi,\pi]) \to \mathbf{R}$ 为

$$T_n x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) D_n(t) \, dt,$$

其中

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kt \sin \frac{1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \left(k + \frac{1}{2}\right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{1}{2}t}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

则有

$$\|T_nx\|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)D_n(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)||D_n(t)|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t\max_{t\in[-\pi,\pi]}|x(t)|$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t\|x\|_\infty,$$

故 T_n 有界,且 $\|T_n\|\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t$. 下证

$$\|T_n\|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t. \tag{5.5.3}$$

令

$$f_m(t)=\frac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\frac{1}{m}},$$

则有 $f_m\in C([-\pi,\pi])$, $\|f_m\|\leqslant 1$. 由

$$\|T_n\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T_nx\|\geqslant\|T_nf_m\|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_m(t)D_n(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_n^2(t)}{|D_n(t)|+\frac{1}{m}}\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_n^2(t)-\frac{1}{m^2}}{|D_n(t)|+\frac{1}{m}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(|D_n(t)|-\frac{1}{m}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t-\frac{2}{m},$$

令 $m\to\infty$ 即得式(5.5.3). 此时,

$$\|T_n\|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{|\sin s|}{s}\mathrm{d}s\geqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin s|}{s}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin s|}{s}\mathrm{d}s$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin s|\,ds$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

再由调和级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$的发散性，得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|=\infty,$$

故由共鸣定理，知$\exists x_0\in C([-\pi,\pi])$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_nx_0\|=\infty,$$

即x_0在0处的Fourier级数(5.5.2)的前n项和的极限为∞，故该级数发散.

实际上，要构造一个具体的周期为2π的连续函数，使得它的Fourier级数在某一指点发散并非易事. 1873年，Du Bois-Reymond①首次给出了一个连续函数的Fourier级数在一点发散的例子，Fejer②于1910年也给出了一个构造性的反例，其证明相当繁琐. 例5.5.2的证明充分体现了泛函分析方法的高度概括性与应用上的普适性.

习　题　5.5

1. 设X是Banach空间，Y是赋范空间，$\{T_n\}\subset B(X,Y)$. 若$\forall x\in X$，$\{T_nx\}$是Y中的Cauchy列，证明：算子列$\{T_n\}$一致有界.

2. 设实数列$\{a_k\}$对任何满足$\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2<\infty$的实数列$\{b_k\}$，都有

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2b_k^2<\infty,$$

证明：

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k|<\infty.$$

3. 设实数列$\{a_k\}$对任何满足$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|<\infty$的实数列$\{b_k\}$，都有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|<\infty,$$

证明：

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k|<\infty.$$

4. 设$y(t)$是$[a,b]$上的可测函数，$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，若$\forall x\in L^p([a,b])$，积分

$$\int_a^b x(t)y(t)dt$$

---

① 杜布尔-雷蒙(1831～1889年)，德国数学家.

② 费耶(1880～1959年)，匈牙利数学家，匈牙利数学之父.

存在,证明:$y\in L^q([a,b])$.

5.6 有界线性泛函的性质

1. Riesz 表示定理

定理 5.6.1(Riesz 表示定理) 设 f 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性泛函,则存在唯一的 $y\in H$,使对 $\forall x\in H$,

$$f(x)=\langle x,y\rangle, \tag{5.6.1}$$

且有

$$\|f\|=\|y\|.$$

证 存在性:令

$$M=\ker(f),$$

则 M 是 H 的闭子空间.由正交分解定理,H 可分解为两个子空间 M 与 $M^{\perp}$ 的直和,即

$$H=M\oplus M^{\perp},$$

① 若 $M=H$,则 $f\equiv 0$,此时取 $y=0$ 即可;

② 若 $M\neq H$,则 $M^{\perp}\neq\{0\}$,故 $\exists x_0\in M^{\perp}$,$x_0\neq 0$. 下证 $f(x_0)\neq 0$.

若 $f(x_0)=0$,则 $x_0\in M$,从而有 $x_0\in M\cap M^{\perp}=\{0\}$,即 $x_0=0$,矛盾.取

$$x_1=\frac{1}{f(x_0)}x_0,$$

则 $x_1\in M^{\perp}$,$f(x_1)=1$. $\forall x\in H$,有

$$\begin{aligned}f[x-f(x)x_1]&=f(x)-f(f(x)x_1)\\&=f(x)-f(x)f(x_1)=0,\end{aligned}$$

故 $x-f(x)x_1\in M$,再由 $x_1\in M^{\perp}$,得

$$\begin{aligned}\langle x-f(x)x_1,x_1\rangle&=\langle x,x_1\rangle-\langle f(x)x_1,x_1\rangle\\&=\langle x,x_1\rangle-f(x)\|x_1\|^2=0,\end{aligned}$$

$$f(x)=\frac{1}{\|x_1\|^2}\langle x,x_1\rangle=\left\langle x,\frac{1}{\|x_1\|^2}x_1\right\rangle.$$

令 $y=\frac{1}{\|x_1\|^2}x_1$,就有 $f(x)=\langle x,y\rangle$.

再由 Schwarz 不等式,

$$|f(x)|=|\langle x,y\rangle|\leqslant\|y\|\,\|x\|,$$

故 $\|f\|\leqslant\|y\|$；又

$$\left|f\left(\frac{1}{\|y\|}y\right)\right|=\left|\left\langle\frac{1}{\|y\|}y,y\right\rangle\right|=\frac{1}{\|y\|}\langle y,y\rangle=\|y\|,$$

故 $\|f\|=\|y\|$.

唯一性：若有 $y'\in H$，使对 $\forall x\in H$，$f(x)=\langle x,y'\rangle$，则有

$$\langle x,y-y'\rangle=\langle x,y\rangle-\langle x,y'\rangle=0,$$

再由 x 的任意性，得 $y'=y$. 证毕.

推论 5.6.1 若 f 是 $\mathbf{K}^n$ 上的线性泛函，则存在唯一的 $y=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{K}^n$，使对 $\forall(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{K}^n$，有

$$f(x)=\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_k x_k,$$

且

$$\|f\|=\|a\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

推论 5.6.2 若 f 是 $L^2(\Omega)$ 上的有界线性泛函，则存在唯一的 $v\in L^2(\Omega)$，使对 $\forall u\in L^2(\Omega)$，有

$$f(u)=\langle u,v\rangle=\int_\Omega u(t)\,\overline{v(t)}\,dt,$$

且

$$\|f\|=\|v\|=\left(\int_\Omega|v(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

有界线性泛函的 Riesz 表示(5.6.1)是 Hilbert 空间理论中最有价值的结果之一，它使得在 Hilbert 空间中运用有界线性泛函成为一件简单的事，这种性质是 Banach 空间中所缺少的.

2. Hahn-Banach 延拓定理

赋范空间 X 的子空间上的有界线性泛函能否延拓为 X 上的有界线性泛函？下面的定理给出了一般的回答.

定理 5.6.2(Hahn①-Banach 延拓定理) 设 M 是赋范空间 X 的子空间，f_0 是定义在 M 上的有界线性泛函，则 f_0 可以保范延拓到全空间 X 上，即存在 X 上的

---

① 哈恩(1879～1934年)，德国数学家.

有界线性泛函 f,满足

1° 延拓条件:当 $x\in M$ 时,$f(x)=f_0(x)$;

2° 保范条件:$\|f\|=\|f_0\|_M$.

证 仅对 M 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间的情形给出证明,一般情形可参见文献[4].

在 M 上使用 Riesz 表示定理,知 $\exists y\in M$, $\|y\|=\|f_0\|_M$,使对 $\forall x\in M$,有

$$f_0(x)=\langle x,y\rangle.$$

设 P 是从 X 到 M 上的正交投影算子,$\forall x\in X$,定义线性泛函

$$f(x)=\langle Px,y\rangle,$$

则当 $x\in M$ 时,有

$$f(x)=\langle Px,y\rangle=\langle x,y\rangle=f_0(x).$$

由式(4.5.1),得

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|\langle Px,y\rangle|\leqslant\|Px\|\,\|y\|\\&\leqslant\|x\|\,\|y\|=\|f_0\|_M\|x\|,\end{aligned}$$

故 f 是 X 上的有界线性泛函,且 $\|f\|\leqslant\|f_0\|_M$. 由于

$$\begin{aligned}\|f_0\|_M&=\sup_{x\in M,\|x\|=1}\|f_0(x)\|\\&\leqslant\sup_{x\in H,\|x\|=1}\|f(x)\|=\|f\|,\end{aligned}$$

故有

$$\|f\|=\|f_0\|_M,$$

证毕.

Hahn-Banach 延拓定理与逆算子定理、一致有界原理并称为泛函分析的三大基本定理,与后两个定理不同的是,它不要求空间具有完备性. 它还与 Baire 纲定理(用其可推导出 5.4 节中的所有定理)一起构成了泛函分析的两大基石,其应用贯穿于整个泛函分析.

下面是 Hahn-Banach 延拓定理的三个重要推论,它们在算子理论中的使用甚至比 Hahn-Banach 延拓定理本身还频繁.

推论 5.6.3 设 A 是赋范空间 X 的子空间,$x_0\in X$,$d=d(x_0,A)>0$,则存在 X 上的有界线性泛函 f,使得

$$\|f\|=1,\quad f(x_0)=d,$$

且 $\forall x\in A$,$f(x)=0$.

证 令

$$M=\{\alpha x_0+x;\alpha\in\mathbf{K},x\in A\},$$

则 M 为 x_0 与 A 张成的子空间. 在 M 上定义线性泛函 f_0 为

$$f_0(\alpha x_0 + x) = \alpha d,$$

则 $f_0(x_0)=d$,且 $\forall x\in A$,

$$f_0(x) = f_0(0x_0 + x) = 0d = 0.$$

由于

$$\begin{aligned}\| f_0 \|_M &= \sup_{y\in M, y\neq 0} \frac{| f_0(y) |}{\| y \|} = \sup_{x\in A, \alpha\in \mathbb{K}, \alpha\neq 0} \frac{| \alpha d |}{\| \alpha x_0 + x \|} \\ &= \sup_{x\in A, \alpha\in \mathbb{K}} \frac{d}{\| x_0 + \alpha^{-1} x \|} = \sup_{y\in A} \frac{d}{\| x_0 - y \|} \\ &= \frac{d}{\inf\limits_{y\in A} \| x_0 - y \|} = \frac{d}{d} = 1,\end{aligned}$$

所以 f_0 为 M 上的有界线性泛函. 再由 Hahn-Banach 延拓定理,可将 f_0 保范延拓到 X 上得 f,且

$$\| f \| = \| f_0 \|_M = 1.$$

证毕.

推论 5.6.4　设 X 是赋范空间,则 $\forall x_0\in X\backslash\{0\}$,必存在 X 上的有界线性泛函 f,使得

$$\| f \| = 1, \quad f(x_0) = \| x_0 \|.$$

证　在推论 5.6.3 中取 $A=\{0\}$,则由

$$d(x_0, A) = d(x_0, 0) = \| x_0 \| > 0$$

即得结论. 证毕.

推论 5.6.5　设 X 是赋范空间,$x_0, y_0\in X$. 若对 X 上的有界线性泛函 f,都有

$$f(x_0) = f(y_0),$$

则 $x_0=y_0$.

注　特别地,若对 X 上的所有有界线性泛函 f,都有 $f(x_0)=0$,则 $x_0=0$.

证　若 $x_0\neq y_0$,则 $x_0 - y_0\neq 0$,由推论 5.6.4,存在 X 上的有界线性泛函 f,使得

$$f(x_0 - y_0) = \| x_0 - y_0 \| \neq 0,$$

而由 f 的线性性,

$$f(x_0 - y_0) = f(x_0) - f(y_0) = 0,$$

矛盾,故 $x_0=y_0$. 证毕.

综合 5.4 节～5.6 节所述的基本定理的条件与结论,得表 5-1.

表 5-1 有界线性算子的基本定理

定理	条件				结论
	X	Y	其他		
开映射定理	Banach 空间	Banach 空间	$T\in B(X,Y)$	满射	T 是开映射
逆算子定理				双射	$T^{-1}\in B(Y,X)$
闭图像定理			$T:X\to Y$ 闭线性算子		$T\in B(X,Y)$
一致有界原理		赋范空间	$F\subset B(X,Y)$ $\sup\limits_{T\in F}\\|Tx\\|<\infty$		$\{\\|T\\|\}$ 有界
Riesz 表示定理	Hilbert 空间	$\mathbf{K}$	$f\in B(X,\mathbf{K})$		存在唯一的 $y\in X$，使 $f(x)=\langle x,y\rangle$，$\\|f\\|=\\|y\\|$
Hahn-Banach 延拓定理	赋范空间		$f_0\in B(M,\mathbf{K})$ M 为 X 的子空间		$\exists f\in B(X,\mathbf{K})$，使 $f\|_M=f_0$，$\\|f\\|_X=\\|f_0\\|_M$

3. Hahn-Banach 延拓定理的应用

推论 5.6.5 的价值在于，要证向量等式 $x=y$（这通常是一个无限问题），只需证明对赋范空间 X 上的所有有界线性泛函 f，都有数量等式 $f(x)=f(y)$（而这通常只是一个初等问题）.

应用以上思想的一个有趣的例子，便是向量分析（即实向量函数的微积分学）的建立. 设 $x:[a,b]\to X$ 是一个向量值函数，仿照经典微积分学中的做法，定义

$$x'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

为 $x(t)$ 在 $t\in(a,b)$ 处的导数，只要右式极限存在；定义

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=\lim_{\max\{\Delta t_k\}\to 0}\sum_{k=1}^{n}x(\tau_k)\Delta t_k$$

为 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分，其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 是 $[a,b]$ 的任一分割，

$$\Delta t_k=t_k-t_{k-1},\qquad \tau_k\in[t_{k-1},t_k].$$

可以证明，当 X 为 Banach 空间，$x(t)$ 为连续映射时，上述积分存在.

对 X 上的任一有界线性泛函 f，当下列各式均有意义时，我们有

$$f(x'(t))=f\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}f\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right)$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x(t+\Delta t))-f(x(t))}{\Delta t}=[f(x(t))]',\tag{5.6.2}$$

$$f\left(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right)=f\left(\lim_{\max\{\Delta t_k\}\to 0}\sum_{k=1}^{n}x(\tau_k)\Delta t_k\right)=\lim_{\max\{\Delta t_k\}\to 0}f\left(\sum_{k=1}^{n}x(\tau_k)\Delta t_k\right)$$

$$= \lim_{\max\{\Delta t_k\}\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x(\tau_k))\Delta t_k = \int_a^b f(x(t))\mathrm{d}t, \tag{5.6.3}$$

从而有界线性泛函与微分(积分)运算可交换. 由此出发,我们可以证明向量函数积分的 Newton[①]-Leibniz[②] 公式:

定理 5.6.3　设 X 是 Banach 空间,函数 $x:[a,b]\to X$ 有连续导数,则

$$\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t = x(b) - x(a).$$

证　对赋范空间 X 上的任一有界线性泛函 f,由式(5.6.3)、式(5.6.2)及实连续函数的 Newton-Leibniz 公式,有

$$\begin{aligned} f\left(\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t\right) &= \int_a^b f(x'(t))\mathrm{d}t = \int_a^b [f(x(t))]'\mathrm{d}t \\ &= f(x(b)) - f(x(a)) \\ &= f(x(b) - x(a)), \end{aligned}$$

再由推论 5.6.5,有

$$\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t = x(b) - x(a).$$

证毕.

定理 5.6.3 的证明是如此的初等,使得微积分学的一些经典结论(如分部积分公式)都可以轻而易举地推广到值域为 Banach 空间的向量函数上,我们在不经意间就建立了 Banach 空间中的无限维向量分析,而这一切的基础就是一个 Hahn-Banach 延拓定理,泛函分析方法的高度概括性与应用上的普适性,在此又一次得到了充分展示.

习　题　5.6

1. 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间,f_0 是定义在 M 上的有界线性泛函,证明:f_0 在 H 上的保范延拓是唯一的.

2. 设 M 是赋范空间 X 的子空间,$x_0\in X$,若对 X 上的所有满足 $f|_M=0$ 的有界线性泛函 f,都有

$$f(x_0) = 0,$$

证明:$x_0\in \overline{M}$.

3. 设 X 是赋范空间,$x_0\in X$,若对 X 上所有范数为 1 的有界线性泛函 f,都有 $|f(x_0)|\leqslant C$,证明:

$$\|x_0\| \leqslant C.$$

4. 设 X 是赋范空间,$X\neq\{0\}$,证明:$\forall x\in X$,有

---

① 牛顿(1642~1727 年),英国数学家、物理学家、天文学家,微积分学的创始人之一.

② 莱布尼茨(1646~1716 年),德国数学家、哲学家,微积分学的创始人之一.

$$\|x\| = \sup_{\|f\|=1, f\in B(X,\mathbf{K})} |f(x)|.$$

5.7 对偶空间与自反空间

1. 对偶空间

定义 5.7.1 称赋范空间 X 上的全体有界线性泛函所成的赋范空间 $B(X,\mathbf{K})$ 为 X 的对偶空间(或共轭空间),记作 X^*.

注 由 $\mathbf{K}$ 的完备性,知 X^* 是一个 Banach 空间(定理 5.2.3).

定理 5.7.1 设 H 是数域 $\mathbf{K}$ 上的 Hilbert 空间,

1° 若 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$,则 H^* 与 H 等距线性同构;

2° 若 $\mathbf{K}=\mathbf{C}$,则 H^* 与 H 等距共轭线性同构.

证 由 Riesz 表示定理,$\forall f\in H^*$,存在唯一的 $y\in H$,使对 $\forall x\in H$,有

$$f(x) = \langle x,y\rangle,$$

且 $\|f\| = \|y\|$. 定义 $T:H^*\to H$ 为

$$Tf = y,$$

则由 $\|f\| = \|y\|$,知 T 是等距的;$\forall f_1,f_2\in H^*$,记

$$Tf_1 = y_1, \qquad Tf_2 = y_2,$$

若 $Tf_1=Tf_2$,则由 $y_1=y_2$,得

$$f_1 = \langle x,y_1\rangle = \langle x,y_2\rangle = f_2,$$

知 T 是单射;$\forall y\in H$,令 $f(x)=\langle x,y\rangle$,则 $f\in H^*$,再由 $Tf=y$,知 T 是满射;最后,$\forall \alpha,\beta\in\mathbf{K}$,由

$$\begin{aligned}(\alpha f_1+\beta f_2)(x) &= \alpha f_1(x)+\beta f_2(x) = \alpha\langle x,y_1\rangle+\beta\langle x,y_2\rangle \\ &= \langle x,\bar{\alpha}y_1+\bar{\beta}y_2\rangle\end{aligned}$$

知

$$T(\alpha f_1+\beta f_2) = \bar{\alpha}y_1+\bar{\beta}y_2 = \bar{\alpha}Tf_1+\bar{\beta}Tf_2,$$

即 T 是一个从 H^* 到 H 的等距共轭线性同构映射,特别地,当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 时,

$$T(\alpha f_1+\beta f_2) = \alpha Tf_1+\beta Tf_2,$$

T 是一个从 H^* 到 H 的一个等距线性同构映射. 证毕.

注 对于实 Hilbert 空间,我们在等距线性同构的意义下认为 $H^*=H$;对于复 Hilbert 空间,我们在等距共轭线性同构的意义下认为 $H^*=H$.

例 5.7.1 $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间是 $\mathbf{R}^n$,l^2 的对偶空间是 l^2,$L^2([a,b])$ 的对偶空间是 $L^2([a,b])$.

由于上述 3 个空间均为 Hilbert 空间,故有此结论. 对于非 Hilbert 空间,我们同样可以在等距线性同构的意义下来讨论两个空间的相等.

例 5.7.2　l^1 的对偶空间是 l^∞，即 $\forall f\in(l^1)^*$，存在唯一的 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^\infty$，使得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}y_kx_k,\qquad \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^1$$

且 $\|f\|=\|y\|_\infty$.

证　存在性：记

$$e_k=(\underbrace{0,\cdots,0}_{k-1},1,0,\cdots),$$

则 $\{e_k\}$ 是 l^1 的基，$\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^1$，有

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k.$$

$\forall f\in(l^1)^*$，由 f 的连续性，有

$$\begin{aligned}f(x)&=f\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\Big)=\lim_{n\to\infty}f\Big(\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_kf(e_k)=\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)x_k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}y_kx_k,\end{aligned}$$

其中 $y_k=f(e_k)$. 因为 $\forall k\in\mathbf{N}$，

$$|y_k|=|f(e_k)|\leqslant\|f\|\,\|e_k\|_1=\|f\|,$$

所以 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^\infty$ 且

$$\|y\|_\infty=\sup_{k\in N}|y_k|\leqslant\|f\|.$$

又由

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\Big|\sum_{k=1}^{\infty}y_kx_k\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|y_k||x_k|\\&\leqslant(\sup_{k\in N}|y_k|)\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\\&=\|y\|_\infty\|x\|_1\end{aligned}$$

知 $\|f\|\leqslant\|y\|_\infty$，故 $\|f\|=\|y\|_\infty$. 定义 $T:(l^1)^*\to l^\infty$ 为

$$Tf=y,$$

则 T 是一个等距线性同构映射，从而有 $(l^1)^*=l^\infty$.

唯一性：设有 $z=(z_1,z_2,\cdots)\in l^\infty$，使得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}z_kx_k,$$

则 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^1$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - z_k)x_k = f(x) - f(x) = 0,$$

取 $x = x^{(n)} = (y_1 - z_1, \cdots, y_n - z_n, 0, \cdots)$，则 $x \in l^1$，代入上式，有

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2 = 0,$$

故 $y_k = z_k, k = 1, \cdots, n$，再由 n 的任意性，得 $z = y$.

例 5.7.3 l^p 的对偶空间是 l^q，即 $\forall f \in (l^p)^*$，存在唯一的 $y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^q$，使得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k, \qquad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$$

且 $\|f\| = \|y\|_q$，其中 $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

例 5.7.4 $L^1([a,b])$ 的对偶空间是 $L^\infty([a,b])$，即 $\forall f \in (L^1([a,b]))^*$，存在唯一的 $y \in L^\infty([a,b])$，使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in L^1([a,b])$$

且 $\|f\| = \|y\|_\infty$，其中 $L^\infty([a,b])$ 为 $[a,b]$ 上几乎处处有界可测函数空间，其上的范数为

$$\|x\|_\infty = \inf\{\sup\{|x(t)| ; t \in [a,b] \backslash A\} ; A \subset [a,b], m(A) = 0\}.$$

例 5.7.5 $L^p([a,b])$ 的对偶空间是 $L^q([a,b])$，即 $\forall f \in (L^p([a,b]))^*$，存在唯一的 $y \in L^q([a,b])$，使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in L^p([a,b])$$

且 $\|f\| = \|y\|_q$，其中 $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

例 5.7.6 设 $1 < p < \infty, 0 < \alpha < p, \forall u \in L^p([0,1])$，定义

$$f(u) = \int_0^1 u(x^\alpha)\mathrm{d}x,$$

证明：$f \in (L^p([0,1]))^*$，并求 $\|f\|$.

证 令 $x^\alpha = t$，得

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\frac{1}{\alpha}t^{\alpha^{-1}-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $v(t) = \frac{1}{\alpha}t^{\alpha^{-1}-1}$，则由

$$\|v\|_q = \frac{1}{\alpha}\left[\int_0^1 t^{(\alpha^{-1}-1)q}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(\alpha^{-1}-1)q+1}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\alpha(p-1)}{p-\alpha}\right]^{\frac{1}{q}} < \infty$$

知 $v\in L^q([0,1])$，故由例 5.7.5 的结论，有 $f\in(L^p([0,1]))^*$，且

$$\|f\|=\|v\|_q=\frac{1}{a}\left[\frac{a(p-1)}{p-a}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

2. 二次对偶空间

定义 5.7.2　X^* 的对偶空间 $(X^*)^*$ 称为 X 的二次对偶空间(或二次共轭空间)，记作 X^{**}.

下面我们来讨论 X 与 X^{**} 的关系. 对于 $x\in X, f\in X^*$，有两种不同的看法：

1° 固定 $f\in X^*$，让 x 跑遍 X，得定义在 X 上的泛函 $f(x)$；

2° 固定 $x\in X$，让 f 跑遍 X^*，得定义在 X^* 上的泛函 J_x：

$$J_x(f)=f(x),\qquad \forall f\in X^* \tag{5.7.1}$$

且 J_x 具有下列性质：

命题 5.7.1　$J_x\in X^{**}$，且 $\|J_x\|\leqslant\|x\|$.

证　$\forall f,g\in X^*, \alpha,\beta\in\mathbf{K}$，有

$$\begin{aligned}J_x(\alpha f+\beta g)&=(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)\\&=\alpha J_x(f)+\beta J_x(g),\end{aligned}$$

故 J_x 是线性的；再由

$$|J_x(f)|=|f(x)|\leqslant\|x\|\,\|f\|$$

知 $J_x: X^*\to\mathbf{K}$ 是有界线性泛函，且 $\|J_x\|\leqslant\|x\|$. 证毕.

因此，若从观点 2°出发，可定义映射 $J: X\to X^{**}$ 为

$$J(x)=J_x,\quad \forall x\in X, \tag{5.7.2}$$

则 J 就建立了 X 与 X^{**} 的联系.

定理 5.7.2　任一赋范空间 X 与其二次对偶空间 X^{**} 的某一子空间等距线性同构.

证　设映射 $J: X\to X^{**}$ 由式(5.7.2)定义，则

① J 是单的：设 $J(x)=J(y)$，则 $J_x=J_y$，即 $\forall f\in X^*$，有

$$f(x)=J_x(f)=J_y(f)=f(y),$$

故由推论 5.6.5，有 $x=y$；

② J 是线性的：$\forall x,y\in X, a,\beta\in\mathbf{K}$，有

$$\begin{aligned}J(ax+by)&=J_{ax+by}(f)=f(ax+by)\\&=af(x)+bf(y)=aJ_x(f)+bJ_y(f)\\&=aJ(x)+bJ(y);\end{aligned}$$

③ J 是等距的：对 $x\in X\setminus\{0\}$，由推论 5.6.4，$\exists f_0\in X^*$，使得

$$\|f_0\|=1,\qquad f_0(x)=\|x\|,$$

于是

$$\|J_x\| = \sup_{\|f\|=1} |J_x(f)| \geqslant |J_x(f_0)|$$
$$= |f_0(x)| = \|x\|,$$

所以

$$\|J_x\| = \|x\|,$$

故 J 是从 X 到 X^{**} 的子空间 $J(X)$ 的等距线性同构映射. 证毕.

注 称 J 为从 X 到 X^{**} 中的**自然嵌入映射**,若直接记 $x=J_x$,则定理 5.7.2 表明 $X \subset X^{**}$,且 $x \in X$ 具备了双重意义:

1° x 是 X 中的一个向量 x;

2° x 是 X^* 上的一个有界线性泛函 J_x,

这一观点凸显了 X 与 X^* 的对偶性.

在自然嵌入的意义下,定理 2.5.4 的存在性证明对于赋范空间 X 就显得很平凡. 作为 X^* 的对偶空间,X^{**} 是完备的,故 X 的闭包 $\overline{X}$ 作为 X^{**} 的闭子空间也是完备的,从而 $\overline{X}$ 就是 X 的完备化空间.

由于在通常情况下 J 不是满射,故对偶关系不是一种等价关系,它不具备对称性,即 X^* 是 X 的对偶空间推不出 X 是 X^* 的对偶空间,除非 $X=X^{**}$,这就是我们下面要引入的自反空间的概念.

3. 自反空间

定义 5.7.3 赋范空间 X 称为**自反空间**,若映射 $J: X \to X^{**}$:

$$J(x) = J_x, \quad \forall x \in X$$

是满射,即 $J(X)=X^{**}$.

定理 5.7.3 Hilbert 空间是自反空间.

证 仅对 H 为实 Hilbert 空间来证明. 由定理 5.7.1,有

$$H^{**} = H^* = H,$$

则由 Riesz 表示定理,$\forall f \in H^*$,$\exists y \in H$,使得

$$J_x(f) = f(x) = \langle x, y \rangle, \qquad \forall x \in H,$$

记 $y=f$,则 $\forall x \in H$,有

$$J_x(f) = \langle x, f \rangle,$$

故 $J_x \in H^{**}$ 与 $x \in H$ 可建立一一对应关系,再由 $J(x)=J_x$,得

$$J(H) = H = H^{**},$$

J 是满射,证毕.

定理 5.7.4 设 X 为赋范空间,若 X^* 可分,则 X 也可分.

证 X^* 可分,故由习题 2.4.4,X^* 中的单位球面

$$S^* = \{f \in X^* : \|f\| = 1\}$$

也可分,从而 S^* 存在可数的稠子集 $\{f_n\}$. $\forall n\in\mathbf{N}$,由

$$\| f_n \| = \sup_{\|x\|=1} | f_n(x) | = 1$$

知 $\exists x_n\in X$, $\| x_n \| =1$,使得

$$| f_n(x_n) | > \frac{1}{2}.$$

令

$$A = \overline{\mathrm{span}\{x_n\}},$$

因为 $\{x_n\}$ 中任意有限个向量的有理系数线性组合在 A 中稠密,所以 A 是可分的,下证 $X=A$.

反证. 若 $X\neq A$,则 $\exists x_0\in X\backslash A$. 由于 A 是 X 的闭子空间,故有 $d(x_0,A)>0$,否则 $x_0\in\overline{A}=A$. 由推论 5.6.3, $\exists f\in X^*$,使得

$$\forall x\in A, \qquad f(x) = 0$$

且 $\| f \| =1$. 此时,由 $f\in S^*$ 及

$$\| f_n - f \| = \sup_{\|x\|=1} | f_n(x) - f(x) |$$

$$\geqslant | f_n(x_n) - f(x_n) | = | f_n(x_n) | > \frac{1}{2},$$

得 $\{f_n\}$ 在 S^* 中不稠密,矛盾,故 $X=A$, X 可分. 证毕.

例 5.7.7　$\mathbf{K}^n$, l^p, $L^p([a,b])$ $(1<p<\infty)$ 都是自反空间.

证　$\mathbf{K}^n$ 是 Hilbert 空间,故是自反空间;由例 5.7.3,有 $(l^p)^*=l^q$,故

$$(l^p)^{**} = [(l^p)^*]^* = (l^q)^* = l^p,$$

l^p 是自反空间;同理,

$$(L^p([a,b]))^{**} = (L^q([a,b]))^* = L^p([a,b]),$$

$L^p([a,b])$ 是自反空间.

例 5.7.8　l^1, $L^1(\Omega)$ 不是自反空间.

证　前者是由

$$(l^1)^* = l^\infty, \qquad (l^\infty)^* \neq l^1$$

造成的,因为如果有 $(l^\infty)^*=l^1$,则由例 2.4.3, l^1 是可分的,从而有 $(l^\infty)^*$ 可分,再由定理 5.7.4, l^∞ 可分,但这与 l^∞ 不可分矛盾(例 2.4.7). 后者的原因类似.

习　题　5.7

1. 设 $f\in X^*$, $f\neq 0$, $x_0\in X\backslash\ker(f)$,证明: $\forall x\in X$, x 可唯一地表为

$$x = y + \alpha x_0$$

的形式,其中 $y\in\ker(f)$, $\alpha\in\mathbf{K}$.

2. 极限为 0 的数列空间 $c_0=\{(x_1,x_2,\cdots): \lim\limits_{n\to\infty} x_n=0\}$ 在范数 $\| x \|_0=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} | x_n |$ 下是一个 Banach空间. 证明:

$$(c_0)^* = l^1.$$

3. 设 $f\in(L^2([0,\pi]))^*$，且 $\forall u\in L^2([0,\pi])$，

$$f(u)=\int_0^\pi u(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

求 $\|f\|$.

4. 证明：任何有限维赋范空间都是自反的.

5.8 对偶算子

1. 对偶算子的概念

命题 5.8.1 设 X,Y 是赋范空间，$T\in B(X,Y)$，$\forall f\in Y^*$，令

$$f^*(x)=f(T(x)),$$

则 $f^*\in X^*$.

证 线性性：$\forall x,y\in X,\alpha,\beta\in\mathbf{K}$，由 T,f 的线性性可得

$$\begin{aligned}f^*(\alpha x+\beta y)&=f(T(\alpha x+\beta y))=f(\alpha Tx+\beta Ty)\\&=\alpha f(Tx)+\beta f(Ty)=\alpha f^*(x)+\beta f^*(y).\end{aligned}$$

有界性：由

$$|f^*(x)|=|f(Tx)|\leqslant\|f\|\,\|Tx\|\leqslant\|f\|\,\|T\|\,\|x\|$$

知 $f^*\in X^*$. 证毕.

注 当 f 在 Y^* 中变化时，$f\to f^*$ 就定义了一个 $Y^*\to X^*$ 的线性算子 T^*：

$$T^*f=f^*=f\circ T.$$

定义 5.8.1 设 X,Y 是赋范空间，$T\in B(X,Y)$，$T^*:Y^*\to X^*$ 定义为

$$(T^*f)(x)=f(Tx),\quad \forall f\in Y^*,\quad x\in X,$$

则称 T^* 为 T 的**对偶算子**(或**共轭算子**、**伴随算子**).

例 5.8.1 设 $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为线性算子，其对应的矩阵为 $\mathbf{A}_{m\times n}$，则 A 的对偶算子 $A^*:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ 所对应的矩阵为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

证 $\forall x\in\mathbf{R}^n$，$Ax=\mathbf{A}x$. 由 Riesz 表示定理，知 $\forall f\in(\mathbf{R}^m)^*=\mathbf{R}^m$，有

$$\begin{aligned}(A^*f)(x)&=f(Ax)=f(\mathbf{A}x)=\langle\mathbf{A}x,f\rangle\\&=(\mathbf{A}x)^{\mathrm{T}}f=x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}f=\langle x,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}f\rangle,\end{aligned}$$

故有

$$A^*f=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}f,$$

所以 A^* 可由 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 来表示.

例 5.8.2 设 $T:L^2([a,b])\to L^2([a,b])$ 是以 $K(t,s)$ 为核的积分算子：

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $K(t,s)$ 满足

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty,$$

则 T 的对偶算子 $T^*: L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ 是以 $\overline{K(s,t)}$ 为核的积分算子.

证 $\forall f \in (L^2([a,b]))^* = L^2([a,b])$，由 Riesz 表示定理，$\exists y \in L^2([a,b])$，使得

$$f(x) = \langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\begin{aligned}(T^* f)(x) &= f(Tx) = \int_a^b (Tx)(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = \int_a^b\left[\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right]\overline{y(t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b x(s)\left[\int_a^b K(t,s)\overline{y(t)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s = \int_a^b x(t)\left[\int_a^b K(s,t)\overline{y(s)}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b x(t)\overline{\left[\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s\right]}\mathrm{d}t = \left\langle x, \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s\right\rangle,\end{aligned}$$

故有

$$T^* f = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s,$$

由于视 f 与 y 是同一的，故有

$$(T^* y)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s,$$

即 T^* 是以 $\overline{K(s,t)}$ 为核的积分算子.

2. 对偶算子的性质

定理 5.8.1 设 X, Y 是赋范空间，$T \in B(X,Y)$，则 $T^*: Y^* \to X^*$ 是有界线性算子，且

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

证 由

$$|(T^* f)(x)| = |f(Tx)| \leqslant \|f\|\,\|Tx\| \leqslant \|f\|\,\|T\|\,\|x\|,$$

知

$$\|T^* f\| \leqslant \|T\|\,\|f\|,$$

故 $T^* \in B(Y^*, X^*)$，且

$$\|T^*\| \leqslant \|T\|;$$

又 $\forall x_0 \in X, Tx_0 \in Y$，若 $Tx_0 \neq 0$，在 Y 上运用推论 5.6.4，则 $\exists f \in Y^*$，使得

$$\|f\| = 1, \quad f(Tx_0) = \|Tx_0\|,$$

故

$$\begin{aligned}\|Tx_0\| &= |f(Tx_0)| = |(T^*f)(x_0)| \\ &\leqslant \|T^*f\|\,\|x_0\| \leqslant \|T^*\|\,\|f\|\,\|x_0\| \\ &= \|T^*\|\,\|x_0\|;\end{aligned}$$

若 $Tx_0=0$，则上式也成立，故

$$\|T\| \leqslant \|T^*\|.$$

合之，得 $\|T^*\|=\|T\|$. 证毕.

定理 5.8.2 设 $T_1,T_2,T\in B(X,Y)$，$S\in B(Y,Z)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，则

1° $(\alpha T_1+\beta T_2)^*=\alpha T_1^*+\beta T_2^*$；

2° $(ST)^*=T^*S^*$；

3° 若 I_X,I_{X^*} 分别为 X,X^* 上的单位算子，则

$$(I_X)^*=I_{X^*};$$

4° 若 T 在 Y 上有有界逆算子，则 T^* 在 X^* 上也有有界逆，且

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*.$$

证 1° $\forall f\in Y^*$，$x\in X$，

$$\begin{aligned}[(\alpha T_1+\beta T_2)^*f](x) &= f[(\alpha T_1+\beta T_2)(x)] = f(\alpha T_1x+\beta T_2x) \\ &= \alpha f(T_1x)+\beta f(T_2x) = \alpha(T_1^*f)(x)+\beta(T_2^*f)(x) \\ &= (\alpha T_1^*f+\beta T_2^*f)(x),\end{aligned}$$

故有

$$(\alpha T_1+\beta T_2)^*f=\alpha T_1^*f+\beta T_2^*f=(\alpha T_1^*+\beta T_2^*)f,$$
$$(\alpha T_1+\beta T_2)^*=\alpha T_1^*+\beta T_2^*.$$

2° $\forall g\in Z^*$，$x\in X$，

$$\begin{aligned}[(ST)^*g](x) &= g(STx) = (S^*g)(Tx) \\ &= [(T^*S^*)g](x),\end{aligned}$$

故有 $(ST)^*=T^*S^*$.

3° $\forall f\in X^*$，由

$$(I_X)^*f=f\cdot I_X=f,$$

知 $(I_X)^*=I_{X^*}$.

4° 由 2°、3° 可得

$$T^*(T^{-1})^*=(T^{-1}T)^*=(I_X)^*=I_{X^*},$$
$$(T^{-1})^*T^*=(TT^{-1})^*=(I_Y)^*=I_{Y^*},$$

故

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*,$$

再由 $T^{-1}\in B(Y,X)$，知 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*\in B(X^*,Y^*)$. 证毕.

习　题　5.8

1. 求零算子 O 的对偶算子.

2. 定义算子 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = (0, 0, x_1, x_2, \cdots), \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

证明：T 是有界线性算子，并求 T^*.

3. 定义算子 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \cdots\right), \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

证明：T 是有界线性算子，并求 T^*.

4. 设 $T \in B(X)$，证明：

$$(T^n)^* = (T^*)^n.$$

5.9　强收敛与弱收敛

1. 点列的弱收敛

(1) 弱收敛的概念

在点列的依范数收敛下，无限维赋范空间中的单位闭球不是紧集（定理 3.4.4），$(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 中的点列收敛本质上是函数列的一致收敛（例 2.3.3），故一些经典的数学分析技巧派不上用场，因此需要定义较弱的收敛性，以得到更多的结论.

定义 5.9.1　设 X 是赋范空间，$\{x_n\} \subset X$，若 $\exists x \in X$，使对 $\forall f \in X^*$，有

$$f(x_n) \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

则称点列 $\{x_n\}$ **弱收敛**(weakly convergent)于 x，记作

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad (n \to \infty),$$

x 称为 $\{x_n\}$ 的**弱极限**.

注　相应地，把 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x 称为**强收敛**(strongly convergent)，记作

$$x_n \xrightarrow{s} x \quad (n \to \infty),$$

或

$$x_n \to x \quad (n \to \infty),$$

x 称为 $\{x_n\}$ 的**强极限**.

例 5.9.1　在 Hilbert 空间 l^2 中，记

$$e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, 1, 0, \cdots),$$

则 $\{e_n\}$ 不强收敛于 0，但弱收敛于 0.

证 由于

$$\| e_n - 0 \| = \| e_n \| = 1,$$

故$\{e_n\}$不强收敛于 0;由 Riesz 表示定理,$\forall f\in(l^2)^*$,$\exists y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^2$,使得

$$f(x) = \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k,$$

则由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$,知

$$f(e_n) = \bar{y}_n \to 0,$$

从而有 $e_n \xrightarrow{w} 0(n\to\infty)$.

(2) **弱收敛的性质**

定理 5.9.1 设$\{x_n\}$弱收敛于 x,则

1° 弱极限唯一;

2° $\{x_n\}$有界.

证 1° 设 $x_n \xrightarrow{w} x$,$x_n \xrightarrow{w} y(n\to\infty)$,则$\forall f\in X^*$,有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y).$$

由数列极限的唯一性,知

$$f(x) = f(y),$$

再由推论 5.6.5,知 $x=y$.

2° 设 $x_n \xrightarrow{w} x$,$J: X\to X^{**}$ 为自然嵌入映射,则$\forall f\in X^*$,有

$$J_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) = J_x(f),$$

即$\{J_{x_n}(f)\}$为收敛数列,故是有界的,即

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} | J_{x_n}(f) | = M(f) < +\infty,$$

在 Banach 空间 X^* 运用一致有界原理,得$\{\| J_{x_n} \|\}$有界,而

$$\| J_{x_n} \| = \| x_n \|,$$

故$\{x_n\}$有界. 证毕.

例 5.9.2 在连续函数空间 $C([a,b])$中,$x_n \xrightarrow{w} x(n\to\infty)$的充分必要条件是

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \| x_n \|_\infty < \infty, \quad x_n(t) \to x(t) \quad (n\to\infty), \quad \forall t\in[a,b].$$

证 仅证必要性. 由定理 5.9.1,$\{x_n\}$的有界性是必须的,下证$\{x_n\}$的点态收敛性. $\forall t\in[a,b]$,定义

$$f_t(x) = x(t),$$

则$\forall x,y\in C([a,b])$,$\alpha,\beta\in\mathbf{K}$,有

$$f_t(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$$

$$= \alpha f_t(x) + \beta f_t(y),$$

且

$$|f_t(x)| = |x(t)| \leqslant \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = \|x\|_\infty,$$

故 $f_t \in (C([a,b]))^*$，从而由 $x_n \xrightarrow{w} x$，知当 $n\to\infty$ 时，有

$$x_n(t) = f_t(x_n) \to f_t(x) = x(t).$$

注　例 5.9.2 表明，$C([a,b])$ 中的有界点列的弱收敛等价于该函数列的处处收敛，这比强收敛时函数列的一致收敛性要弱得多. 与此类似的结论还有：

例 5.9.3　l^p 中的有界点列的弱收敛等价于该数列的按坐标收敛.

例 5.9.4　$L^p([a,b])$ 中的有界点列 $\{u_n\}$ 的弱收敛等价于 u_n 的变上限积分列处处收敛，即

$$\int_0^x u_n(t)\mathrm{d}t \to \int_0^x u(t)\mathrm{d}t(n\to\infty), \quad \forall x \in [a,b].$$

(3) 弱收敛与强收敛的关系

定理 5.9.2　设 $\{x_n\}$ 是赋范空间 X 中的点列，则

1° $x_n \to x(n\to\infty) \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x(n\to\infty)$；

2° 若 $\dim X = m < \infty$，则弱收敛与强收敛等价.

证　1° 若 $x_n \to x$，则 $\forall f\in X^*$，由 f 的连续性知

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x),$$

即 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x.

2° 设 $x_n \xrightarrow{w} x(n\to\infty)$，$\{e_1,\cdots,e_m\}$ 是 X 的一个基，则

$$x_n = \xi_1^{(n)} e_1 + \cdots + \xi_m^{(n)} e_m,$$
$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_m e_m.$$

且 $\forall f\in X^*$，有

$$f(x_n) \to f(x) \quad (n\to\infty).$$

定义

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$
$$f_i(x) = \xi_1 f_i(e_1) + \cdots + \xi_m f_i(e_m) = \xi_i,$$

则 $f_i \in X^*$，故有

$$\xi_i^{(n)} = f_i(x_n) \to f_i(x) = \xi_i \quad (n\to\infty),$$

从而当 $n\to\infty$ 时有

$$\|x_n - x\| \leqslant \|\sum_{i=1}^m (\xi_i^{(n)} - \xi_i)e_i\| \leqslant \sum_{i=1}^m \|(\xi_i^{(n)} - \xi_i)e_i\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \, \|e_i\| \to 0,$$

即$\{x_n\}$强收敛于 x. 证毕.

注 由于在微积分学中只讨论有限维空间,故在高等数学中无弱收敛的概念.

Hilbert 空间中的弱收敛与强收敛具有下列性质.

定理 5.9.3 设 H 是 Hilbert 空间,$\{x_n\}\subset H$,$x\in H$,则

1° $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall y\in H, \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle\ (n\to\infty)$;

2° $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$ 且 $\|x_n\| \to \|x\|\ (n\to\infty)$.

证 1° 由 Riesz 表示定理,$\forall f\in H^*$,存在唯一的 $y\in H$,使对$\forall x\in H$,有

$$f(x) = \langle x, y\rangle,$$

故$\forall f\in H^*$,$f(x_n)\to f(x)$等同于$\forall y\in H$,$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$.

2° 直接按照定义验证即可. 证毕.

定理 5.9.4 自反空间中的有界点列必有弱收敛子列.

注 这表明自反空间中的有界集在弱收敛的意义下有列紧性(称为弱列紧性),从而其中的单位闭球必是弱紧的. 注意到在点列的依范数收敛下,无限维赋范空间的单位闭球不是紧集,这一变化是很重要的.

2. 算子列的强收敛与弱收敛

在 5.2 节中,我们指出 $B(X,Y)$中的算子列$\{T_n\}$称为依算子范数收敛(或一致收敛),若$\exists T\in B(X,Y)$,使得

$$\|T_n - T\| \to 0 \quad (n\to\infty),$$

并记作 $T_n\to T(n\to\infty)$. 下面我们给出两个较弱的收敛性概念.

定义 5.9.2 设 X,Y 是赋范空间,$\{T_n\}\subset B(X,Y)$,若$\exists T\in B(X,Y)$,使对

① $\forall x\in X$,

$$T_n x \to Tx \quad (n\to\infty), \tag{5.9.1}$$

则称算子列$\{T_n\}$强收敛于 T,记作 $T_n \xrightarrow{s} T$;

② $\forall x\in X$,

$$T_n x \xrightarrow{w} Tx \quad (n\to\infty), \tag{5.9.2}$$

则称算子列$\{T_n\}$弱收敛于 T,记作 $T_n \xrightarrow{w} T$.

注 算子列的强收敛本质上就是处处收敛(点态收敛),它之所以被称为强收敛,是因为式(5.9.1)中用到的收敛是 Y 中点列的强收敛,就像弱收敛是因为式(5.9.2)中用到的收敛是点列的弱收敛一样.

例 5.9.5 设 $T_n: l^1\to l^1$ 为 n 步左移算子,即$\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^1$,有

$$T_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots),$$

则 $T_n \in B(l^1)$，且当 $n \to \infty$ 时，

$$\| T_n x - Ox \|_1 = \| T_n x - 0 \|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} | x_k | \to 0,$$

故 $T_n \xrightarrow{s} O(n \to \infty)$. 但由于

$$\| T_n x \|_1 = \sum_{k=n}^{\infty} | x_k | \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} | x_k | = \| x \|_1,$$

$$\| T_n(\underbrace{0, \cdots, 0}_{n\text{个}}, 1, 0, \cdots) \|_1 = 1,$$

故有 $\| T_n \| = 1$，从而 $\{T_n\}$ 不一致收敛到零算子 O.

定理 5.9.5　设 X, Y 是赋范空间，$\{T_n\} \subset B(X,Y)$，$T \in B(X,Y)$，则

$$T_n \to T \;\Rightarrow\; T_n \xrightarrow{s} T \;\Rightarrow\; T_n \xrightarrow{w} T.$$

证　若 $T_n \to T$，则 $\forall x \in X$，当 $n \to \infty$ 时有

$$\| T_n x - Tx \| = \| (T_n - T)x \| \leqslant \| T_n - T \| \, \| x \| \to 0,$$

故 $T_n x \to Tx$，即 $T_n \xrightarrow{s} T$. 若 $T_n \xrightarrow{s} T$，则 $\forall x \in X$，

$$T_n x \to Tx \quad (n \to \infty),$$

从而由定理 5.9.2，必有

$$T_n x \xrightarrow{w} Tx \quad (n \to \infty),$$

故 $T_n \xrightarrow{w} T$. 证毕.

3. 泛函列的弱*收敛

定义 5.9.3　设 X 为赋范空间，$\{f_n\} \subset X^*$，若 $\exists f \in X^*$，使对 $\forall x \in X$，

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

则称泛函列 $\{f_n\}$ **弱*收敛**(weakly* convergent)于 f，记作

$$f_n \xrightarrow{w^*} f \quad (n \to \infty).$$

注　若将 $\{f_n\}$ 看作一个算子列，则弱*收敛就是算子列的强收敛，只是在不同的场合下习惯的叫法不同罢了.

弱*收敛具有下列性质：

定理 5.9.6　设 X 是 Banach 空间，$\{f_n\} \subset X^*$，$f \in X^*$，若 $f_n \xrightarrow{w^*} f$，则 $\{f_n\}$ 一致有界(即 $\{\| f_n \|\}$ 有界).

证　由 $f_n \xrightarrow{w^*} f$，知 $\forall x \in X$，

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

故 $\{f_n(x)\}$ 有界，即

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| = M(x) < \infty.$$

由一致有界原理,得$\{\|f_n\|\}$有界. 证毕.

定理 5.9.7 设 X 是 Banach 空间,$\{f_n\}\subset X^*$,则$\{f_n\}$弱*收敛的充分必要条件是:

1° $\{f_n\}$一致有界;

2° 存在 X 的稠集 A,使得$\{f_n(x)\}$在 A 上收敛.

定理 5.9.8(弱*列紧性) 设 X 是可分的赋范空间,则 X^* 中任一有界点列$\{f_n\}$有弱*收敛子序列.

最后,总结本节所讨论的各种收敛性,得表 5-2.

表 5-2 各种收敛性的比较

类 型	名 称	记 号	定 义
点列收敛性	强收敛(依范数收敛)	$x_n\to x$	$\|x_n-x\|\to 0$
	弱收敛	$x_n\xrightarrow{w}x$	$\forall f\in X^*, f(x_n)\to f(x)$
算子列收敛性	一致收敛(依算子范数收敛)	$T_n\to T$	$\|T_n-T\|\to 0$
	强收敛	$T_n\xrightarrow{s}T$	$\forall x\in X, \|T_nx-Tx\|\to 0$
	弱收敛	$T_n\xrightarrow{w}T$	$\forall x\in X, f\in Y^*$, $f(T_nx)\to f(Tx)$
泛函列收敛性	弱*收敛	$f_n\xrightarrow{w^*}f$	$\forall x\in X, f_n(x)\to f(x)$

习 题 5.9

1. 证明:在 Hilbert 空间中,

$$x_n\to x \Leftrightarrow x_n\xrightarrow{w}x \text{ 且 } \|x_n\|\to\|x\| \ (n\to\infty).$$

2. 定义 l^2 到 l^2 的有界线性算子 T_n 为

$$T_nx = (\underbrace{0,\cdots,0}_{n},x_1,x_2,\cdots), \qquad \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2,$$

证明:$T_n\xrightarrow{w}O$ 但不强收敛于零算子 O.

3. 证明:弱*极限是唯一的.

4. 设 $x\in L^2([-\pi,\pi])$,证明:$L^2([-\pi,\pi])$中的泛函列

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt$$

弱*收敛于零算子 O.

第 6 章　有界线性算子的谱分析

对有限维赋范空间，我们可以用矩阵来表示其间的线性算子，从而可以用矩阵理论（特别是其中的特征值理论）来研究线性算子. 尽管我们不能完全地将这一做法推广到一般的 Banach 空间，但类似于矩阵分析，数学家建立了有界线性算子的谱理论，这一理论迄今仍是泛函分析中最优美的一个组成部分. 本章将对 Banach 空间上的有界线性算子，特别是紧线性算子的谱分析及 Hilbert 空间上的自伴算子的谱理论作一个简单介绍，作为今后我们更进一步学习泛函理论的一个入门.

6.1　线性算子的谱与正则集

1. 谱与正则集的概念

谱与正则集的概念是从解各种方程的过程中提炼出来的，例如

① 线性方程组：

$$Ax-\lambda x=y, \tag{6.1.1}$$

其中 A 是数域 $\mathbf{K}$ 中的 n 阶方阵，$\lambda\in\mathbf{K}$，x,y 是 $\mathbf{K}^n$ 中 n 维列向量；

② 线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)-\lambda x(t)=f(t); \tag{6.1.2}$$

③ Fredholm 积分方程：

$$\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t-\lambda x(s)=\varphi(s), \tag{6.1.3}$$

这些方程可抽象成下列算子方程

$$Tx-\lambda x=y\quad(\text{或}(T-\lambda I)x=y), \tag{6.1.4}$$

这里 T 是数域 $\mathbf{K}$ 上某个赋范空间 X 到其自身的线性算子，I 是 X 中的单位算子，$\lambda\in\mathbf{K}$ 是一个参数，$x,y\in X$，于是研究上述各种方程解的存在性、唯一性、稳定性（即解关于非齐次项 y 的连续依赖性）问题均可归结为研究对任意给定的 $y\in X$，方程(6.1.4)的解 x 的存在性、唯一性及稳定性. 这一问题等价于算子 $T-\lambda I$ 是否有定义在整个空间 X 上的、有界的逆算子，因为

1° 逆算子 $(T-\lambda I)^{-1}$ 有意义（但不一定在全空间 X 上有定义）等价于方程(6.1.4)若有解，则解唯一；

2° 逆算子$(T-\lambda I)^{-1}$定义在X上等价于$\forall y\in X$,方程(6.1.4)有解;

3° 逆算子$(T-\lambda I)^{-1}$有界等价于方程(6.1.4)的解的稳定性.

由线性代数的知识知道,当λ为A的特征值时,线性方程组(6.1.1)可能无解也可能有无穷多解,而特征值可以为复数,故本章大部分问题的讨论都在复空间上进行.

定义 6.1.1 设X是复 Banach 空间,T是X到其自身中的有界线性算子,即$T\in B(X)$,I是X中的单位算子,$\lambda\in\mathbf{C}$.

1° 若λ使得$T-\lambda I$具有定义在整个空间X上的逆算子

$$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}$$

(称作算子T的**预解算子**或**预解式**),则称λ为算子T的**正则值**. 正则值的全体记作$\rho(T)$,称为T的**正则集**.

2° 若λ不是T的正则值,则称为T的**谱点**. 谱点的全体记作$\sigma(T)$,称为T的**谱**.

注 当$\lambda\in\rho(T)$时,由于$T-\lambda I\in B(X)$,$T-\lambda I$既是单射又是满射,故由逆算子定理,知预解算子$(T-\lambda I)^{-1}$是有界线性算子.

2. 谱的性质

为了进一步弄清正则集$\rho(T)$与谱$\sigma(T)$在复平面$\mathbf{C}$上的分布情况,我们给出算子级数及其收敛的概念.

定义 6.1.2 设X是赋范空间,$\{T_n\}\subset B(X)$,则算子级数$\sum_{k=1}^{\infty}T_k$称为收敛的,若

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}T_k$$

在$B(X)$中依算子范数收敛.

当X是复 Banach 空间时,由定理 5.2.3,知$B(X)$是完备的,再由定理 3.3.1,知当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|T_k\|<\infty,$$

即$\sum_{k=1}^{\infty}T_k$绝对收敛时,$\sum_{k=1}^{\infty}T_k$收敛.

(1) 谱的有界性

引理 6.1.1 设X为复 Banach 空间,$T\in B(X)$,若$\|T\|<1$,则$I-T$的逆算子$(I-T)^{-1}\in B(X)$,且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k=I+T+T^2+\cdots \tag{6.1.5}$$

证　因为 $\|T\|<1$,所以数项级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|T\|^k$ 收敛. 由习题 5.2 中第 4 题,有

$$\|T^k\|\leqslant\|T\|^k,$$

故级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|T^k\|$ 也收敛,从而算子级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}T^k$ 收敛. 记

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}T^k,\quad S_n=\sum_{k=0}^{n-1}T^k,$$

下证

$$S=(I-T)^{-1}.$$

注意到,当 $n\to\infty$ 时,$S_n\to S$ 且对任意 $U\in B(X)$,有

$$\|S_n\cdot U-S\cdot U\|\leqslant\|S_n-S\|\,\|U\|\to 0,$$
$$\|U\cdot S_n-U\cdot S\|\leqslant\|S_n-S\|\,\|U\|\to 0,$$

故 $S_n\cdot U\to S\cdot U, U\cdot S_n\to U\cdot S$. 由

$$(I-T)\cdot S_n=(I-T)\cdot(I+T+\cdots+T^{n-1})=I-T^n,$$
$$S_n\cdot(I-T)=(I+T+\cdots+T^{n-1})\cdot(I-T)=I-T^n,$$

令 $n\to\infty$,由于 $\|T\|<1$,

$$\|T^n\|\leqslant\|T\|^n\to 0,$$

得

$$(I-T)\cdot S=S\cdot(I-T)=I,$$

由此可得 $S=(I-T)^{-1}$. 证毕.

引理 6.1.1 表明,若 $\|T\|<1$,则 $1\in\rho(T)$. 其实我们有下列更一般的结论.

定理 6.1.1　设 X 为复 Banach 空间,$T\in B(X)$,则对满足

$$|\lambda|>\|T\|$$

的一切复数 λ,有 $\lambda\in\rho(T)$.

证　因为

$$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|<1,$$

由引理 6.1.1,$\left(I-\frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}\in B(X)$ 存在,注意到 $T-\lambda I=-\lambda\left(I-\frac{1}{\lambda}T\right)$,故

$$(T-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}$$

存在,且是定义在全空间 X 上的有界线性算子,故 $\lambda\in\rho(T)$. 证毕.

由定理 6.1.1,Banach 空间上的有界线性算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 必为闭圆盘 $|\lambda|\leqslant\|T\|$ 上的有界集.

(2) 谱的紧性

定理 6.1.2 复 Banach 空间 X 上的有界线性算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 为闭集.

证 由于 $\sigma(T)$ 是 T 的正则集 $\rho(T)$ 在复数集 $\mathbf{C}$ 中的余集,故只需证明 $\rho(T)$ 是开集,即 $\rho(T)$ 中的任意点都是内点. $\forall \lambda_0 \in \rho(T)$,则对 $\forall \lambda \in \mathbf{C}$,由于

$$\begin{aligned} T-\lambda I &= (T-\lambda_0 I)-(\lambda-\lambda_0)I \\ &= (T-\lambda_0 I)\cdot[I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}], \end{aligned}$$

则由引理 6.1.1,当 $\|(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}\|<1$,即

$$|\lambda-\lambda_0|<\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$$

时,算子 $I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}$ 的逆算子存在,故有

$$(T-\lambda I)^{-1}=[I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0 I)^{-1}]^{-1}\cdot(T-\lambda_0 I)^{-1}$$

存在且是定义在全空间 X 上的有界线性算子. 这表明在 λ_0 的 $\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$ 邻域内,都有 $\lambda\in\rho(T)$,即 λ_0 是 $\rho(T)$ 的内点. 再由 λ_0 的任意性,得 $\rho(T)$ 是开集. 证毕.

由于 $\mathbf{C}$ 为有限维赋范空间,其上的有界闭集一定是紧集(定理 3.4.4),故由定理 6.1.1 与定理 6.1.2 知,$\sigma(T)$ 是复平面上的紧集.

(3) 谱半径

定义 6.1.3 设 X 为复 Banach 空间,$T\in B(X)$,称数

$$r_\sigma(T)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(T)\}$$

为算子 T 的**谱半径**.

由定理 6.1.1,显然有

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|.$$

此外,我们还有:

定理 6.1.3 (Gelfand[①] 定理)设 X 为复 Banach 空间,$T\in B(X)$,则

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

定理的证明很长,这里从略,有兴趣的同学可参见文献[8].

习 题 6.1

1. 设 X 为复 Banach 空间,$T\in B(X)$,$\lambda,\mu\in\rho(T)$,证明:

$$R_\lambda(T)-R_\mu(T)=(\lambda-\mu)R_\lambda(T)\cdot R_\mu(T),$$

其中 $R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$,$R_\mu(T)=(T-\mu I)^{-1}$.

2. 设 $A,B\in B(X)$ 且 $A\cdot B=B\cdot A$,证明:

---

① 盖尔范德(1913 年~),俄罗斯数学家.

$$r_\sigma(A+B)\leqslant r_\sigma(A)+r_\sigma(B).$$

3. 设 $A,B\in B(X)$ 且 $A\cdot B=B\cdot A$，证明：

$$r_\sigma(A\cdot B)\leqslant r_\sigma(A)r_\sigma(B).$$

4. 设 $S,T\in B(X)$，证明：

$$r_\sigma(S\cdot T)=r_\sigma(T\cdot S).$$

6.2 有界线性算子的谱分析

1. 谱的结构

(1) 特征值与特征向量

定义 6.2.1 设 X 是复 Banach 空间，$T\in B(X)$，若复数 λ 使得方程

$$(T-\lambda I)x=0$$

有非零解 $x\neq 0$，则称 λ 为 T 的一个**特征值**，x 为 T 的对应于特征值 λ 的**特征向量**.

引理 6.2.1 设 T 是线性空间上的线性算子，则 T 的对应于不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的.

证 用数学归纳法证明.

首先，对 $n=2$，若存在数 α_1,α_2，使得

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=0,\tag{6.2.1}$$

将算子 T 作用式(6.2.1)两边，可得

$$\lambda_1\alpha_1x_1+\lambda_2\alpha_2x_2=0,\tag{6.2.2}$$

要使式(6.2.1)与式(6.2.2)同时成立，必有 $\alpha_1=0$，否则由 $\alpha_1\neq0$ 和 $\lambda_1\neq\lambda_2$，可得

$$(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1x_1=0,$$

$$x_1=0,$$

这与 $x_1\neq0$ 矛盾，同理可证 $\alpha_2=0$，x_1,x_2 线性无关.

假设对自然数 $k<n$，$x_1,\cdots,x_k$ 线性无关，下证 $x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}$ 也线性无关. 设存在 $k+1$ 个数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$，使得

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_kx_k+\alpha_{k+1}x_{k+1}=0,\tag{6.2.3}$$

将算子 T 作用式(6.2.3)两边，并注意到 $x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}$ 是分别属于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k,\lambda_{k+1}$ 的特征向量，可得

$$\lambda_1\alpha_1x_1+\cdots+\lambda_k\alpha_kx_k+\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}x_{k+1}=0.\tag{6.2.4}$$

式(6.2.4)减去式(6.2.3)的 λ_{k+1} 倍，可得

$$(\lambda_1-\lambda_{k+1})\alpha_1x_1+\cdots+(\lambda_k-\lambda_{k+1})\alpha_kx_k=0,$$

由归纳法假设，$x_1,\cdots,x_k$ 是线性无关的，因此

$$(\lambda_i-\lambda_{k+1})\alpha_i=0\quad(i=1,\cdots,k),$$

再由 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$，必有

$$\alpha_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, k).$$

代入式(6.2.3)，又有 $\alpha_{k+1}=0$，故 $x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}$ 线性无关. 由归纳法，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关. 证毕.

(2) *点谱*

定义 6.2.2 T 的特征值的全体称为 T 的点谱(point spectrum)，记作 $\sigma_p(A)$.

注 对于 X 中的零元素 0，必有

$$(T - \lambda I)0 = 0,$$

故当 λ 为 T 的特征值时，$T-\lambda I$ 不是单射，从而 $(T-\lambda I)^{-1}$ 不存在，故算子 T 的任一特征值都是谱点，即

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T).$$

对有限维赋范空间上的线性算子 A，若记其表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$(它依赖于线性空间基的选择)，从线性代数的知识知道，$\forall \lambda \in \mathbf{C}$，只有两种可能：

1° 行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda I|=0$，此时 λ 为算子 A 的特征值；

2° 行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda I| \neq 0$，此时 λ 为算子 A 的正则值.

因此，在有限维空间中，$\sigma_p(A)=\sigma(A)$.

但在无限维赋范空间上，T 的谱 $\sigma(T)$ 并不都是由 T 的特征值组成，即 $\sigma_p(T)$ 仅仅是谱 $\sigma(T)$ 的子集.

(3) *谱点的分类*

谱点可以根据它破坏正则性的方式分为三类：

1° 若 $(T-\lambda I)^{-1}$ 不存在，即

$$\ker (T - \lambda I) \neq \{0\},$$

则 λ 为 T 的特征值，其全体构成算子 T 的点谱 $\sigma_p(T)$；

2° 若 $(T-\lambda I)^{-1}$ 存在，其定义域不是 X 但在 X 中稠密，即

$$(T - \lambda I)(X) \neq X,$$
$$\overline{(T - \lambda I)(X)} = X,$$

这样的复数 λ 的全体称为 T 的**连续谱**(continuous spectrum)，记作 $\sigma_c(T)$；

3° 若 $(T-\lambda I)^{-1}$ 存在，且其定义域在 X 中不稠密，即

$$\overline{(T - \lambda I)(X)} \neq X,$$

这样的复数 λ 的全体称为 T 的**剩余谱**(residual spectrum)，记作 $\sigma_r(T)$.

由定义，$\sigma_p(T)$，$\sigma_c(T)$，$\sigma_r(T)$ 互不相交且满足

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) = \sigma(T).$$

表 6-1 给出了三类谱点与正则值的比较.

表 6-1　谱点与正则值的比较

λ 的分类		特　征			集合记号	
		$T-\lambda I$		$(T-\lambda I)x=y$		
正则值		单且满		有唯一解	正则集 $\rho(T)$	
谱点		单但不满	值域在 X 中不稠密	有唯一解或无解	谱 $\sigma(T)$	剩余谱 $\sigma_r(T)$
			值域在 X 中稠密	无解时有近似解		连续谱 $\sigma_c(T)$
	特征值	非单		无解或解不唯一		点　谱 $\sigma_p(T)$

2. 谱的确定

例 6.2.1　在 $X=C([0,1])$ 上定义算子 T 如下：

$$(Tx)(t)=tx(t),\quad \forall x\in C([0,1]),$$

则 $T\in B(X)$，且

$$\sigma(T)=\sigma_r(T)=[0,1].$$

证　显然 T 是线性算子，下证 T 有界.

事实上，$\forall x\in C([0,1])$，由

$$\begin{aligned}\|Tx\|_\infty&=\max_{t\in[0,1]}|Tx(t)|=\max_{t\in[0,1]}|tx(t)|\\&\leqslant\max_{t\in[0,1]}|x(t)|=\|x\|_\infty\end{aligned}$$

知 $\|T\|\leqslant 1$，所以 $T\in B(X)$.

① 若 $\lambda\in\mathbf{C}\backslash[0,1]$，记

$$R_\lambda(T)=\frac{1}{t-\lambda}I,$$

则 $R_\lambda(T)\in B(X)$，且对 $\forall x\in C([0,1])$，有

$$\begin{aligned}[R_\lambda(T)\cdot(T-\lambda I)]x(t)&=R_\lambda(T)[(t-\lambda)x(t)]=x(t),\\ [(T-\lambda I)\cdot R_\lambda(T)]x(t)&=(T-\lambda I)\left[\frac{1}{t-\lambda}x(t)\right]\\&=\frac{1}{t-\lambda}(T-\lambda I)[x(t)]\\&=\frac{1}{t-\lambda}(t-\lambda)x(t)=x(t),\end{aligned}$$

故 $R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$，所以 $\lambda\in\rho(T)$.

② 若 $\lambda\in[0,1]$，方程

$$(T-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t)=0$$

在 $C([0,1])$ 中只有零解 $x(t)\equiv 0$，故 λ 不是 T 的特征值. 又算子 $T-\lambda I$ 的值域

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)(C([0,1]))&=\{(t-\lambda)x(t):x(t)\in C([0,1])\}\\&\subset\{y(t)\in C([0,1]):y(\lambda)=0\},\end{aligned}$$

再由 $C([0,1])$ 中点列的收敛等价于函数列的一致收敛，容易推得 $\overline{(T-\lambda I)(C([0,1]))}$

中的任意元素 $z(t)$，都有 $z(\lambda)=0$. 显然 $1\in C([0,1])$，但 $1\notin\overline{(A-\lambda I)(C([0,1]))}$，所以

$$\overline{(T-\lambda I)(C([0,1]))}\neq C([0,1]),$$

由此可知 $\lambda\in\sigma_r(T)$，从而有

$$\sigma(T)=\sigma_r(T)=[0,1].$$

例 6.2.2 在 $X=L^2([0,1])$ 上定义算子 T 如下：

$$(Tx)(t)=tx(t),\quad \forall x\in L^2([0,1]),$$

则 $T\in B(X)$，且

$$\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,1].$$

证 显然 T 是线性算子，且 $\forall x\in L^2[0,1]$，由

$$\|Tx\|_2=\left(\int_0^1|tx(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_0^1|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|_2$$

知 $\|T\|\leqslant 1$，所以 $T\in B(X)$.

① 若 $\lambda\in\mathbb{C}\backslash[0,1]$，$\forall x\in L^2([0,1])$，由

$$\int_0^1\left|\frac{1}{t-\lambda}x(t)\right|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{d^2(\lambda,[0,1])}\int_0^1|x(t)|^2\mathrm{d}t<\infty$$

知 $\frac{1}{t-\lambda}x(t)\in L^2([0,1])$，$\frac{1}{t-\lambda}I\in B(X)$. 因为

$$\left(\frac{1}{t-\lambda}I\right)\cdot(T-\lambda I)=(T-\lambda I)\cdot\left(\frac{1}{t-\lambda}I\right)=I,$$

所以

$$(T-\lambda I)^{-1}=\frac{1}{t-\lambda}I,$$

从而有 $\lambda\in\rho(T)$.

② 若 $\lambda\in[0,1]$，方程

$$(T-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t)=0$$

在 $L^2([0,1])$ 中只有零解 $x=\theta$，这里 θ 是 $L^2([0,1])$ 中的零元素（$[0,1]$ 上几乎处处为零的可测函数），所以 λ 不是 T 的特征值. 下证 $\lambda\in\sigma_c(A)$. 为此，需要证明

$$(T-\lambda I)(L^2([0,1]))\neq L^2([0,1]),$$

$$\overline{(T-\lambda I)(L^2([0,1]))}=L^2([0,1]).$$

因为 $1\in L^2([0,1])$，若有 $(T-\lambda I)(L^2([0,1]))=L^2([0,1])$，则 $\exists u\in L^2([0,1])$，使得

$$(T-\lambda I)u=(t-\lambda)u=1,$$

从而与

$$\frac{1}{t-\lambda}\notin L^2([0,1])$$

矛盾，故

$$(T-\lambda I)(L^2([0,1])) \neq L^2([0,1]).$$

$\forall v \in L^2([0,1])$，对 $\forall \varepsilon > 0(\varepsilon \ll 1)$，构造函数 x_ε 如下：

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t-\lambda}v(t), & t \in [0,1] \setminus (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon), \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}v(t), & t \in [\max\{0, \lambda-\varepsilon\}, \lambda], \\ \dfrac{1}{\varepsilon}v(t), & t \in [\lambda, \min\{1, \lambda+\varepsilon\}], \end{cases}$$

容易验证 $x_\varepsilon \in L^2([0,1])$. 令

$$v_\varepsilon = (T-\lambda I)x_\varepsilon \in (T-\lambda I)(L^2[0,1]),$$

则在 $L^2([0,1])$ 中，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$v_\varepsilon \to v$，所以

$$\overline{(T-\lambda I)(L^2([0,1]))} = L^2([0,1]),$$

从而有 $\lambda \in \sigma_c(T)$. 再由 λ 的任意性，知

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0,1].$$

例 6.2.3　在空间 l^2 上，平移算子 T 定义为

$$Tx = (0, x_1, x_2, \cdots), \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

则 $r_\sigma(T)=1$，T 没有特征值，且

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbf{C}_1 \mid |\lambda| > 1\}, \quad \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbf{C}_1 \mid |\lambda| \leqslant 1\}.$$

证　显然 $T \in B(l^2)$ 且

$$\| T^n x \|_2 = \| (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n}, x_1, x_2, \cdots) \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \| x \|_2,$$

故 $\| T^n \| = 1$，于是

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \to \infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} = 1,$$

故当 $|\lambda| > 1$ 时，$\lambda \in \rho(T)$.

对 $\lambda \neq 0$，令

$$(T-\lambda I)x = (-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, \cdots) = \theta,$$

其中 $\theta = (0,0,\cdots)$ 为 l^2 中的零元素，得 $x = \theta$；对 $\lambda = 0$，令

$$Tx = (0, x_1, x_2, \cdots) = \theta,$$

同样得 $x = \theta$，故 T 无特征值，$\sigma_p(T) = \varnothing$.

当 $|\lambda| \leqslant 1$ 时，讨论算子 $T-\lambda I$ 的值域. 若 $\lambda = 0$，显然有

$$R(T-\lambda I) = R(T) \subset \{(x_1, x_2, \cdots) \in l^2 : x_1 = 0\} \neq l^2;$$

若 $0 < |\lambda| \leqslant 1$，考察方程

$$(T-\lambda I)x = (-1, 0, 0, \cdots), \tag{6.2.5}$$

得

$$x_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{1}{\lambda^n}, \quad \cdots,$$

由于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{2k}}$$

是发散的，故方程(6.2.5)在 l^2 中无解，故同样有 $R(T-\lambda I)\neq l^2$，因此当 $|\lambda|\leqslant 1$ 时，$\lambda\in\sigma(T)$.

习 题 6.2

1. 设 X 为赋范空间，I 是 X 上的恒等算子，试求 $\sigma(I)$，$\sigma_p(I)$，$\rho(I)$.

2. 在 l^2 上定义有界线性算子 T 为

$$Tx=(x_2,x_3,\cdots),\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2,$$

证明：

$$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|>1\},\quad \sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|<1\}.$$

3. 在复 $C([0,1])$ 中考察积分算子

$$(Tx)(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s,$$

试证明 $\rho(T)=\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 且

$$\sigma(T)=\sigma_r(T)=\{0\}.$$

4. 设 M 是复 Hilbert 空间 H 的闭子空间，P 为从 H 到 M 的正交投影算子，求 $\sigma_p(P)$.

6.3 紧线性算子

1. 紧线性算子的概念

(1) 紧算子的定义

定义 6.3.1 设 X,Y 是赋范空间，若算子 $T:X\to Y$ 把 X 中的有界集都映成 Y 中的列紧集，则称 T 为**紧算子**. 从 X 到 Y 的**紧线性算子**(compact linear operator)的全体，记作 $C(X,Y)$，并记 $C(X)=C(X,X)$.

定理 6.3.1 紧线性算子是有界线性算子.

证 设 $T:X\to Y$ 是紧线性算子，则 T 将 X 中的有界集映为 Y 中的列紧集；而由定理 5.1.2，任一线性算子 T 有界的充分必要条件是 T 将 X 中的有界集映为 Y 中的有界集，由于列紧集是有界集，故 T 是有界线性算子. 证毕.

注 由定理 6.3.1，$C(X,Y)$ 是 $B(X,Y)$ 的子空间.

下面我们给出紧算子的两个等价定义.

① $T:X\to Y$ 为紧算子⇔对于 X 中的有界点列 $\{x_n\}$，$\{Tx_n\}$ 有收敛子列；

② $T:X\to Y$ 为紧算子⇔T 把 X 中的单位球 $B_1(0)=\{x\in X:\|x\|<1\}$ 映成 Y 中的列紧集.

例 6.3.1　设 X 是无限维赋范空间，则 X 上的恒等映射 I 不是紧算子.

证　若 I 紧，则有界集 $B_1(0)$ 的像 $B_1(0)$ 是列紧集，从而 $\overline{B_1(0)}$ 是紧集，由定理 3.4.7，X 必是有限维的，矛盾，故 I 不是紧算子.

例 6.3.2　定义积分算子 $T:C([a,b])\to C([a,b])$ 为

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\quad \forall x\in C([a,b]),$$

其中 $K(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续，则 T 是紧线性算子.

证　显然，T 为线性算子. 设 B 是 $C([a,b])$ 中的单位球，由紧算子的等价定义②，要证 T 是紧算子，只需证 $T(B)$ 是列紧集；再由 Arzela-Ascoli 定理，要证 $T(B)$ 是列紧集，只需证 $T(B)$ 一致有界和等度连续.

$K(t,s)$ 在紧集 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续，故有界，令

$$M=\max_{t,s\in[a,b]}|K(t,s)|,$$

则 $\forall x\in B$，有

$$|(Tx)(t)|\leqslant\|Tx\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant\int_a^b M\|x\|_\infty\mathrm{d}s\leqslant M(b-a),$$

故 $T(B)$ 一致有界；又由 $K(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上一致连续，知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，有

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

故 $\forall x\in B$，当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，有

$$|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)|\leqslant\int_a^b|K(t_1,s)-K(t_2,s)|\ \|x\|_\infty\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon,$$

从而有 $T(B)$ 等度连续.

(2) 有限秩算子

定义 6.3.2　设 $T\in B(X,Y)$，若其值域是有限维的，即 $\dim R(T)<\infty$，则称 T 是有限秩算子.

定理 6.3.2　有限秩算子是紧算子.

证　设 T 是有限秩算子，则由 T 有界，知 $\forall x\in B_1(0)$，有

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\ \|x\|\leqslant\|T\|,$$

即 $T(B_1(0))$ 是有界集；再由 $R(T)$ 是有限维的，知 $T(B_1(0))$ 是列紧集，故由紧算子的等价定义②，得 T 是紧算子. 证毕.

推论 有限维赋范空间上的线性算子是紧算子.

证 设 T 是 n 维赋范空间 X 上的线性算子,则由定理 5.3.1,T 是有界线性算子. 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 X 的一个基,则由

$$T(X)=\{x_1Te_1+x_2Te_2+\cdots+x_nTe_n:x_k\in\mathbf{K},k=1,2,\cdots,n\},$$

知 $\dim R(T)\leqslant n$,故 T 是有限秩算子,从而是一个紧算子. 证毕.

2. 紧线性算子的性质

定理 6.3.3 设 X,Y,Z 是赋范空间,$T\in B(X,Y)$,$S\in B(Y,Z)$,且 S,T 有一为紧算子,则 $S\circ T:X\to Z$ 是紧算子.

证 当 T 是紧算子时,设 A 是 X 中的有界集,则由 T 紧,得 $T(A)$是 Y 中的列紧集,再由 S 连续,得

$$(S\circ T)(A)=S[T(A)]$$

是 Z 中的列紧集(定理 2.7.8),故 $S\circ T$ 是紧算子. 当 S 是紧算子时,证明是类似的. 证毕.

定理 6.3.4 设 X 是赋范空间,Y 是 Banach 空间,$\{T_n\}\subset C(X,Y)$. 若$\{T_n\}$依算子范数收敛于 T,则 T 也是紧算子.

证 设 A 是 X 中的有界集,则 $\exists M>0$,使得 $\forall x\in A$,有 $\|x\|\leqslant M$. 由于 $T_n\to T$,故 $\forall \varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}$,使得

$$\|T_N-T\|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

此时,对 $\forall x\in A$,有

$$\begin{aligned}\|T_Nx-Tx\|&=\|(T_N-T)x\|\leqslant\|T_N-T\|\,\|x\|\\&\leqslant M\|T_N-T\|<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

因为 T_N 是紧算子,所以 $T_N(A)$是 Y 中的列紧集,从而是全有界的(定理 2.7.1),故 $T_N(A)$有半径为 $\varepsilon/2$ 的有限开球覆盖:

$$T_N(A)\subset\bigcup_{k=1}^{m}B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_k).$$

由式(6.3.1),有

$$T(A)\subset\bigcup_{k=1}^{m}B_{\varepsilon}(y_k),$$

故 $T(A)$也是全有界的,再由 Y 的完备性,知 $T(A)$是列紧的(定理 2.7.4),故 T 为紧算子. 证毕.

注 当 Y 是 Banach 空间时,由定理 6.3.4 可知 $C(X,Y)$是 Banach 空间 $B(X,Y)$的闭子空间,从而也是 Banach 空间.

例 6.3.3 设线性算子 $T:l^2\to l^2$ 定义为

$$Tx=\left(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots\right),\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2,$$

则 T 是紧线性算子.

证　令 $T_n:l^2\to l^2$ 为

$$T_nx=\left(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},0,\cdots\right),\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2,$$

则 T_n 是有限秩算子,故是紧算子.由于

$$\|(T_n-T)x\|_2=\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{k^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{(n+1)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n+1}\|x\|_2,$$

故有

$$\|T_n-T\|\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0,$$

从而 $T_n\to T$.由定理 6.3.4,T 是紧算子.

定理 6.3.5　设 X,Y 是赋范空间,$T:X\to Y$ 是紧算子,则 T 的对偶算子 $T^*:Y^*\to X^*$ 是紧算子.

定理 6.3.6　设 X,Y 是赋范空间,$T:X\to Y$ 是紧算子,$\{x_n\}\subset X,x\in X$,则

$$x_n\xrightarrow{w}x\quad\Rightarrow\quad Tx_n\to Tx,$$

即 T 把 X 中的弱收敛点列映成 Y 中的强收敛点列.

证　反证.若 $Tx_n\not\to Tx$,则 $\exists\varepsilon_0>0$ 及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$,使得

$$\|Tx_{n_k}-Tx\|\geqslant\varepsilon_0.\tag{6.3.2}$$

由 $\{x_n\}$ 有界及 T 是紧算子,知 $\{Tx_{n_k}\}$ 有收敛子列,不妨设 $Tx_{n_k}\to y$.

$\forall f\in Y^*$,有 $T^*f\in X^*$,故由 $x_{n_k}\xrightarrow{w}x$,得

$$f(Tx_{n_k})=(T^*f)(x_{n_k})\to(T^*f)(x)=f(Tx),$$

又由 f 的连续性,得

$$f(Tx_{n_k})\to f(y),$$

从而由极限的唯一性,得

$$f(y)=f(Tx),$$

再由 f 的任意性,得 $y=Tx$(推论 5.6.5),这与式(6.3.2)矛盾,故 $Tx_n\to Tx$.证毕.

习　题　6.3

1. 设 X,Y 是赋范空间,$T\in B(X,Y)$,证明:T 是紧算子$\Leftrightarrow T$ 把 X 中的单位球 $B_1(0)=\{x\in X:\|x\|<1\}$ 映成 Y 中的列紧集.

2. 设 X,Y 是赋范空间，$T_1,T_2,T\in C(X,Y)$，$\alpha\in\mathbf{K}$，证明：T_1+T_2，αT 都是紧算子.

3. 证明：赋范空间上的有界线性泛函是紧算子.

4. 设数列$\{a_n\}$的极限为 0，$\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$，令

$$Tx=(a_1x_1,a_2x_2,\cdots),$$

证明：T 是 $l^2\to l^2$ 的紧算子.

6.4 紧线性算子的谱分析

1. 紧线性算子的谱理论

对有限维赋范空间上的线性算子的谱，我们已经知道它仅由算子的特征值构成，对无限维空间上的一般有界线性算子的谱结构，人们还不甚明了，但其中的紧线性算子的谱理论(Riesz-Schauder 理论)，结果却是相当完美的.

定理 6.4.1 设 X 是复 Banach 空间，$T\in C(X)$，若 $\dim X=\infty$，则

$$0\in\sigma(T).$$

证 反证. 若 $0\in\rho(T)$，于是 T^{-1}存在，且 $T^{-1}\in B(X)$. 因为 T 是紧算子，T^{-1}是有界线性算子，由定理 6.3.3，

$$TT^{-1}=I$$

也是紧算子，但这是不可能的(例 6.3.1)，故 $0\in\sigma(T)$. 证毕.

定理 6.4.2 设 X 是复 Banach 空间，$T\in C(X)$，则 $\sigma_p(T)$至多是可数集且 0 是其唯一可能的聚点.

证 记

$$A_k=\sigma_p(T)\cap\left\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|>\frac{1}{k}\right\},$$

则有

$$\sigma_p(T)=\{0\}\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$

故要证 $\sigma_p(T)$至多是可数集，只需证明 $\forall k\in\mathbf{N}$，A_k 仅包含有限个不同的特征值.

反证. 假设存在某个自然数 k，集合 A_k 中含有无穷多个不同的特征值，即有 $\lambda_j\in A_k(j=1,2,\cdots)$，$\lambda_i\neq\lambda_j\ (i\neq j)$，于是对每个 $j\geqslant1$，$\exists x_j\in X\setminus\{0\}$，使得

$$Tx_j=\lambda_jx_j.$$

由引理 6.2.1，对任意正整数 n，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关，令

$$M_n=\operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots x_n\},$$

则由推论 3.4.2，M_n 是 X 的闭子空间且 M_{n-1}是 M_n 的真子空间. 由 Riesz 引理(引理 3.4.1)，$\forall n\geqslant2$，$\exists y_n\in M_n$，使得 $\|y_n\|=1$，且对 $\forall y\in M_{n-1}$，

$$\|y_n-y\|\geqslant\frac{1}{2}.$$

注意到

$$\left\|\frac{1}{\lambda_n}y_n\right\| = \frac{1}{|\lambda_n|} < k \quad (n=1,2,\cdots),$$

故点列$\left\{\frac{1}{\lambda_n}y_n\right\}$是 X 的有界集. 设 $y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$,则对任意自然数 $m > n$,由

$$y_m - T\left(\frac{1}{\lambda_m}y_m\right) = \sum_{k=1}^{m-1} a_k\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\right)x_k \in M_{m-1},$$

$$T\left(\frac{1}{\lambda_n}y_n\right) \in M_n \subset M_{m-1}$$

知

$$\left\|T\left(\frac{1}{\lambda_m}y_m\right) - T\left(\frac{1}{\lambda_n}y_n\right)\right\| = \left\|y_m - \left[y_m - T\left(\frac{1}{\lambda_m}y_m\right) + T\left(\frac{1}{\lambda_n}y_n\right)\right]\right\| \geqslant \frac{1}{2},$$

故$\left\{T\left(\frac{1}{\lambda_n}y_n\right)\right\}$在 X 中没有收敛子列,这与算子 T 的紧性矛盾,从而有 $\sigma_p(T)$至多可数.

显然,任一非零数 r 都不可能是$\sigma_p(T)$的聚点,否则

$$\sigma_p(T) \cap \left\{\lambda \in \mathbf{C}; |\lambda| > \frac{|r|}{2}\right\}$$

中含有无穷多个不同的特征值,故 0 是唯一可能的聚点. 证毕.

注　总结定理 6.4.1 和定理 6.4.2 的结论,并注意到谱的有界性,复无限维 Banach 空间上的紧线性算子 T 的谱$\sigma(T)$只有下列 3 种可能性:

① 单点集$\{0\}$;

② 有限集$\{0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$;

③ 可数集$\{0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$,其中 $\lambda_n \to 0$.

定理 6.4.3　设 X 是赋范空间,$T \in C(X)$,$\lambda \neq 0$,若记

$$T_\lambda = T - \lambda I,$$

则 T_λ 的值域$R(T_\lambda)$是 X 的闭子空间.

证　$\forall y \in \overline{R(T_\lambda)}$,则$\exists \{x_n\} \subset X$,使得

$$T_\lambda(x_n) = y_n, \quad y_n \to y.$$

下证 $y \in R(T_\lambda)$. 因为 $0 \in R(A_\lambda)$,不妨设 $y \neq 0$. 设

$$\delta_n = \inf_{x \in \ker(T_\lambda)} \| x_n - x \|$$

为 x_n 与 $\ker(T_\lambda)$的距离,因为 $y \neq 0$ 且 $T_\lambda(x_n) \to y (n \to \infty)$,所以当 n 充分大时,有 $\delta_n > 0$. 由下确界的定义,$\forall n \in \mathbf{N}$,$\exists w_n \in \ker(T_\lambda)$,使得

$$\delta_n \leqslant \| x_n - w_n \| \leqslant \delta_n\left(1+\frac{1}{n}\right). \tag{6.4.1}$$

令 $z_n = x_n - w_n$,注意到

$$T_\lambda z_n = T_\lambda x_n = y_n \to y \quad (n \to \infty), \tag{6.4.2}$$

$$z_n = \frac{1}{\lambda}(Tz_n - T_\lambda z_n) \quad (n = 1,2,\cdots), \tag{6.4.3}$$

因此如能证明$\{z_n\}$是一有界点列,则由算子 T 的紧性,就有$\{z_n\}$的子列$\{z_{n_k}\}$,使得$\{Tz_{n_k}\}$收敛. 再由式(6.4.3)和式(6.4.2),可知$\{z_{n_k}\}$也收敛,不妨设其极限为 z. 由 T_λ 的连续性,应有

$$T_\lambda z = T_\lambda(\lim_{k\to\infty} z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} T_\lambda z_{n_k} = y,$$

由此可得 $y\in R(T_\lambda)$,从而有 $R(T_\lambda)$为闭集.

要证$\{z_n\}$有界,由式(6.4.1),只需证$\{\delta_n\}$有界. 假设$\{\delta_n\}$无界,则$\{\delta_n\}$存在极限为∞的子列,不妨设 $\delta_n\to\infty$. 考察点列$\{z_n/\delta_n\}$,因为

$$\left\|\frac{1}{\delta_n} z_n\right\| \leqslant 1 + \frac{1}{n},$$

所以$\{z_n/\delta_n\}$有界,由算子 T 的紧性,故存在子列$\{z_{n_k}/\delta_{n_k}\}$及 $w\in X$,使得

$$T\left(\frac{1}{\delta_{n_k}} z_{n_k}\right) \to w \quad (k \to \infty).$$

又因为 $T_\lambda z_n \to y$, $\delta_n \to \infty$,所以

$$T_\lambda\left(\frac{1}{\delta_{n_k}} z_{n_k}\right) = \frac{1}{\delta_{n_k}}(T_\lambda z_{n_k}) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

于是当 $k\to\infty$时,

$$\frac{1}{\delta_{n_k}} z_{n_k} = \frac{1}{\lambda}\left[T\left(\frac{1}{\delta_{n_k}} z_{n_k}\right) - T_\lambda\left(\frac{1}{\delta_{n_k}} z_{n_k}\right)\right] \to \frac{1}{\lambda} w, \tag{6.4.4}$$

从而有

$$T_\lambda\left(\frac{1}{\delta_{n_k}} z_{n_k}\right) \to T_\lambda\left(\frac{1}{\lambda} w\right) = \frac{1}{\lambda} T_\lambda w,$$

由极限的唯一性可知

$$T_\lambda w = 0,$$

即 $w\in \ker(T_\lambda)$. 注意到 $w_{n_k}\in\ker(T_\lambda)$,所以

$$\left\|\frac{1}{\delta_{n_k}} z_{n_k} - \frac{1}{\lambda} w\right\| = \frac{1}{\delta_{n_k}}\left\|x_{n_k} - \left(w_{n_k} + \frac{\delta_{n_k}}{\lambda} w\right)\right\|$$

$$\geqslant \frac{d(x_{n_k}, \ker(T_\lambda))}{\delta_{n_k}} = 1,$$

这与式(6.4.4)不符,所以必有$\{\delta_n\}$有界. 证毕.

推论 设 X 是赋范空间,$T\in C(X)$,$\lambda\neq 0$,则 $T_\lambda^n = (T-\lambda I)^n (n=1,2,\cdots)$的值域是 X 的闭子空间.

证 因为

$$T_\lambda^n = (T-\lambda I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\lambda)^{n-k} T^k$$

$$= T\Big[\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{n-k}\lambda^{n-k}T^{k-1}\Big] - (-1)^{n-1}\lambda^n I,$$

且由定理 6.3.3 和习题 6.3 中第 2 题,知

$$A = T\Big[\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{n-k}\lambda^{n-k}T^{k-1}\Big]$$

是紧算子,故由定理 6.4.3 知,$T_\lambda^n = A-(-1)^{n-1}\lambda^n I$ 的值域是闭集.

定理 6.4.4 设 X 是复 Banach 空间,$T\in C(X)$,$\lambda\in\mathbf{C}$ 且 $\lambda\neq 0$,则 λ 要么是 T 的特征值,要么是 T 的正则值,且

$$\dim(\ker T_\lambda) < \infty.$$

证 假设 $\lambda\neq 0$ 不是特征值,则 $T_\lambda = T-\lambda I$ 是单射,下证 $T_\lambda(X)=X$. 若不然,则对所有 $n=1,2,\cdots$,应有

$$T_\lambda^{n+1}(X)\subset T_\lambda^n(X),\quad T_\lambda^{n+1}(X)\neq T_\lambda^n(X). \tag{6.4.5}$$

如果 $\exists n>1$,使得 $T_\lambda^{n+1}(X)=T_\lambda^n(X)$,则

$$T_\lambda^n(X) = T_\lambda^{-1}(T_\lambda^{n+1}(X)) = T_\lambda^{-1}(T_\lambda^n(X)) = T_\lambda^{n-1}(X),$$

由此递推可得 $T_\lambda(X)=X$ 而与 $T_\lambda(X)\neq X$ 矛盾,故式(6.4.5)成立. 再由推论,$T_\lambda^{n+1}(X)$ 是 $T_\lambda^n(X)$ 的真闭子空间,故由 Riesz 引理,可得点列 $\{y_n\}\subset X$,满足:

$$y_n\in T_\lambda^n(X),\quad \|y_n\|=1,\quad \inf_{x\in T_\lambda^{n+1}(X)}\|y_n-x\|\geqslant\frac{1}{2}.$$

又对任意自然数 $m>n$,

$$\begin{aligned} Ty_m - Ty_n &= \lambda y_m - \lambda y_n + T_\lambda y_m - T_\lambda y_n \\ &= -\lambda\Big[y_n - \Big(y_m - \frac{1}{\lambda}T_\lambda y_n + \frac{1}{\lambda}T_\lambda y_m\Big)\Big], \end{aligned}$$

而 $y_m-\dfrac{T_\lambda y_n}{\lambda}+\dfrac{T_\lambda y_m}{\lambda}\in T_\lambda^{n+1}(X)$,故有

$$\|Ty_m - Ty_n\|\geqslant\frac{|\lambda|}{2},$$

所以点列 $\{Ty_n\}$ 没有收敛子列,这与算子 T 的紧性矛盾,从而有 $T_\lambda(X)=X$,于是 $\lambda\in\rho(A)$.

对 $\lambda\neq 0$,若 λ 是 T 的正则值,则 $\dim(\ker T_\lambda)=\dim\{0\}=0<\infty$;若 λ 是 T 的特征值,则由 T 的紧性,知 $\ker T_\lambda$ 中的单位球

$$\begin{aligned} \{x\in\ker T_\lambda: \|x\|<1\} &= \{x\in B_1(0): T_\lambda x = 0\} \\ &= \Big\{x\in B_1(0): x = T\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\Big\}\subset TB_{\frac{1}{|\lambda|}}(0) \end{aligned}$$

是列紧集,故由定理 3.4.4,$\dim(\ker T_\lambda)<\infty$. 证毕.

注 由定理 6.4.4 知,T 的任一非零谱点都是 T 的特征值,即

$$\sigma(T)\setminus\{0\} = \sigma_p(T)\setminus\{0\}.$$

2. 紧算子方程的可解性

在本章开头,我们已经讨论过方程的可解性与算子的谱之间的联系,下面就利用前面的理论研究紧线性算子方程的可解性问题.

引理 6.4.1 设 X 是复 Banach 空间,$T\in C(X)$. $\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$,若记

$$T_\lambda^n=(T-\lambda I)^n,\quad T_\lambda^0=I,$$

则存在一个非负整数 r(依赖于 λ),使得

$$\ker(T_\lambda^0)\subset\ker(T_\lambda^1)\subset\cdots\subset\ker(T_\lambda^r)=\ker(T_\lambda^{r+1})=\cdots$$

且前面的包含关系是真包含.

证 先看两个事实:

1° 对任意自然数 n,因为 $T_\lambda^n(x)=0$ 蕴含 $T_\lambda^{n+1}(x)=0$,故成立

$$\ker(T_\lambda^n)\subset\ker(T_\lambda^{n+1});$$

2° 若有 $n\geqslant 0$,使得 $\ker(T_\lambda^n)=\ker(T_\lambda^{n+1})$,则 $\forall m>n$,应有

$$\ker(T_\lambda^m)=\ker(T_\lambda^{m+1}).$$

若不然,则 $\exists m>n,x_0\in X$,满足 $x_0\in\ker(T_\lambda^{m+1}),x_0\notin\ker(T_\lambda^m)$. 由于

$$T_\lambda^m(x_0)=T_\lambda^n(T_\lambda^{m-n}(x_0))\neq 0,$$

$$T_\lambda^{m+1}(x_0)=T_\lambda^{n+1}(T_\lambda^{m-n}(x_0))=0,$$

故

$$T_\lambda^{m-n}(x_0)\notin\ker(T_\lambda^n),\quad T_\lambda^{m-n}(x_0)\in\ker(T_\lambda^{n+1}).$$

这与 $\ker(T_\lambda^n)=\ker(T_\lambda^{n+1})$矛盾. 因此 $\ker(T_\lambda^m)=\ker(T_\lambda^{m+1})$.

下面我们用反证法来证明引理. 假设对任意自然数 n,

$$\ker(T_\lambda^n)\neq\ker(T_\lambda^{n+1}),$$

因为零空间都是 X 的闭子空间(习题 5.1 中第 2 题),故由 Riesz 引理,$\exists\{x_n\}\subset X$,使得 $x_n\in\ker(T_\lambda^{n+1})$,$\|x_n\|=1$,且 $\forall x\in\ker(T_\lambda^n)$,有

$$\|x_n-x\|\geqslant\frac{1}{2}.$$

下证$\{Tx_n\}$在 X 中没有收敛子列. 对 $m>n$,因为

$$\begin{aligned}Tx_m-Tx_n&=T_\lambda x_m+\lambda x_m-T_\lambda x_n-\lambda x_n\\&=\lambda\left[x_m-\left(x_n-\frac{1}{\lambda}T_\lambda x_m+\frac{1}{\lambda}T_\lambda x_n\right)\right],\end{aligned}$$

故由 $x_m\in\ker(T_\lambda^{m+1})$,得 $T_\lambda x_m\in\ker(T_\lambda^m)$,再由

$$x_n\in\ker(T_\lambda^{n+1})\subset\ker(T_\lambda^m),\quad T_\lambda x_n\in\ker(T_\lambda^n)\subset\ker(T_\lambda^m),$$

得

$$x_n-\frac{1}{\lambda}T_\lambda x_m+\frac{1}{\lambda}T_\lambda x_n\in\ker(T_\lambda^m),$$

于是

$$\|Tx_m - Tx_n\| = |\lambda| \left\| x_m - \left(x_n - \frac{1}{\lambda}T_\lambda x_m + \frac{1}{\lambda}T_\lambda x_n\right) \right\| \geqslant \frac{|\lambda|}{2},$$

从而对有界序列$\{x_n\}\subset X$，$\{Tx_n\}$没有收敛子列，这与算子 T 的紧性不符，故存在整数 $r\geqslant 0$，使得 $\ker(T_\lambda^r)=\ker(T_\lambda^{r+1})$，证毕.

定理 6.4.5　设 X 是复 Banach 空间，$T\in C(X)$，$\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$，则 $\forall y\in X$，方程

$$T_\lambda x = y \tag{6.4.6}$$

均有解的充分必要条件是对应的齐次方程

$$T_\lambda x = 0 \tag{6.4.7}$$

只有零解.

证　必要性：假设齐次方程(6.4.7)有非零解 $x_1\in X$，因为 $\forall y\in X$，方程(6.4.6)均有解，所以 $\exists x_2\in X$，使得

$$T_\lambda x_2 = x_1 \neq 0,\quad T_\lambda^2 x_2 = T_\lambda x_1 = 0.$$

依此类推，我们得到一点列$\{x_n\}\subset X$，满足：

$$T_\lambda x_{n+1} = x_n,\quad T_\lambda^n x_{n+1} = x_1 \neq 0,\quad T_\lambda^{n+1} x_{n+1} = 0$$

因此，对所有的 n，$\ker(T_\lambda^n)\neq\ker(T_\lambda^{n+1})$，与引理 6.4.6 矛盾，所以齐次方程(6.4.7)只有零解.

充分性：设齐次方程(6.4.7)只有零解，于是非零复数 λ 不是 T 的特征值，由定理 6.4.4，此时有 $T_\lambda(X)=X$，即方程(6.4.7)对每个 $y\in X$ 有解. 证毕.

注　此时，λ 是 T 的正则值，故方程(6.4.6)有唯一解 $x=T_\lambda^{-1}y$.

例 6.4.1　讨论积分方程

$$\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x = \lambda u(x) + v(x) \tag{6.4.8}$$

的解，其中 $\lambda\neq 0$ 为常数.

解　在 $X=L^2([0,1])$上，令

$$Tu = \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x,$$

由于 $\dim(T(X))=1$，故 T 是有限秩算子，$T\in C(X)$. 此时，方程可缩写为

$$Tu - \lambda u = v.$$

由于齐次方程 $Tu-\lambda u=0$ 的解为 $u=a$，其中 a 为常数且满足

$$a - \lambda a = 0,$$

故当 $\lambda\neq 1$ 时，方程 $Tu-\lambda u=0$ 只有零解，当 $\lambda=1$ 时有非零解，故由定理 6.4.5，知方程(6.4.8)仅当 $\lambda\neq 1$ 时均有解. 等式(6.4.8)两边在$[0,1]$区间积分，得

$$(1-\lambda)\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x,$$

代入式(6.4.8)，可得解为

$$u(x)=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{1-\lambda}\int_0^1 v(x)\mathrm{d}x-v(x)\right].$$

下面我们将考察复 Banach 空间 X 上的紧算子 $T\in C(X)$ 与它的对偶算子 $T^*\in C(X^*)$(定理 6.3.5)所定义的算子方程的可解性之间的相互关系.

定理 6.4.6 设 X 是复 Banach 空间,$T\in C(X)$,$\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. 则 $\forall y\in X$,方程

$$T_\lambda x=y$$

有解的充分必要条件是对下列对偶方程

$$T^*f-\lambda f=0 \tag{6.4.9}$$

的一切解 $f\in X^*$,成立 $f(y)=0$.

证 必要性:设 $x\in X$ 是方程 $T_\lambda x=y$ 的解,$f\in X^*$ 是方程 $T^*f-\lambda f=0$ 的解,于是

$$\begin{aligned}f(y)&=f(Tx-\lambda x)=f(Tx)-\lambda f(x)\\&=(T^*f)(x)-\lambda f(x)=(T^*f-\lambda f)(x)=0.\end{aligned}$$

充分性:要证方程 $T_\lambda x=y$ 有解,即证 $y\in T_\lambda(X)$. 不然,由 $y\notin T_\lambda(X)$ 及 $T_\lambda(X)$ 是 X 的闭子空间(定理 6.4.3),得

$$\mathrm{d}=\inf_{z\in T_\lambda(X)}\|y-z\|>0,$$

再由推论 5.6.3,$\exists f\in X^*$,使得

$$f(y)=\mathrm{d},\quad f(T_\lambda x)=0,\quad \forall x\in X.$$

此时,$\forall x\in X$,有

$$\begin{aligned}(T^*f-\lambda f)(x)&=f(Tx)-\lambda f(x)=f(Tx-\lambda x)\\&=f(T_\lambda x)=0,\end{aligned}$$

故 $T^*f-\lambda f=0$,即 f 是对偶方程(6.4.9)的解,而对偶方程的一切解均满足 $f(y)=0$,这与 $f(y)=d\neq 0$ 矛盾,故 $y\in T_\lambda(X)$. 证毕.

对称地,我们有下列结论:

定理 6.4.7 设 X 是复 Banach 空间,$T\in C(X)$,$\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. 则 $\forall g\in X^*$,方程

$$T^*f-\lambda f=g$$

有解的充分必要条件是对齐次方程

$$T_\lambda x=0$$

的一切解 $x\in X$,成立 $g(x)=0$.

习 题 6.4

1. 算子 $T:l^2\to l^2$ 定义为

$$Tx=\left(x_2,\frac{x_3}{2},\cdots,\frac{x_{n+1}}{n},\cdots\right),\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2,$$

证明:T 是紧算子且 $\sigma_p(T)=\{0\}$.

2. 算子 $T: l^2 \to l^2$ 定义为

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots\right), \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

证明:T 是紧算子并求 $\sigma(T)$.

3. 算子 $T: l^2 \to l^2$ 定义为

$$Tx = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right), \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

证明:T 是紧算子且 $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$.

4. 设 T 是赋范空间 X 上的紧线性算子,$\lambda \in \mathbf{C}$ 且 $\lambda \neq 0$,T^* 是 T 的对偶算子,证明:$\forall g \in X^*$,对偶方程

$$(T^* - \lambda I^*)f = g$$

有解 $f \in X^*$ 的充分必要条件是相应的齐次方程

$$(T^* - \lambda I^*)f = 0$$

只有零解,其中 I^* 是单位算子 I 的对偶算子.

6.5　Hilbert 空间上的自伴算子的谱分析

1. 自伴算子的概念

定义 6.5.1　设 H 是 Hilbert 空间,$T \in B(H)$,T 称为**自伴算子**,若

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

定理 6.5.1　设 H 是复 Hilbert 空间,$T \in B(H)$,则 T 为自伴算子的充分必要条件是:$\forall x \in H$,$\langle Tx, x\rangle$ 为实数.

证　必要性:若 T 为自伴算子,则 $\forall x \in H$,有

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle},$$

故 $\langle Tx, x\rangle$ 为实数.

充分性:$\forall x \in H$,由

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle$$

得

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \frac{1}{4}[\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle] \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{4}[\langle T(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y\rangle - \langle T(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y\rangle] \\ &= \frac{1}{4}[\langle x+y, T(x+y)\rangle - \langle x-y, T(x-y)\rangle] \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{4}[\langle x+\mathrm{i}y, T(x+\mathrm{i}y)\rangle - \langle x-\mathrm{i}y, T(x-\mathrm{i}y)\rangle] = \langle x, Ty\rangle.\end{aligned}$$

证毕.

例 6.5.1 考察由方阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 定义的线性算子 $A:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$：

$$Ax=\mathbf{A}x,\quad \forall x\in\mathbf{C}^n.$$

由于

$$\langle Ax,y\rangle=\langle \mathbf{A}x,y\rangle=(\mathbf{A}x)^{\mathrm{T}}\bar{y}=x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\bar{y},$$
$$\langle x,Ay\rangle=(x)^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{A}y}=x^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{A}}\overline{y},$$

故

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle \iff \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\overline{\mathbf{A}},$$

即线性算子 A 是自伴算子的充分必要条件是其对应的矩阵 $\mathbf{A}$ 是共轭对称阵，这样的矩阵称为 **Hermite**[①] **矩阵**(实 Hermite 矩阵就是实对称阵).

例 6.5.2 设积分算子 $T:L^2([a,b])\to L^2([a,b])$ 为

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

则

$$\langle Tx,y\rangle=\left\langle\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,y(t)\right\rangle=\int_a^b\left[\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right]\overline{y(t)}\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b x(s)\left[\int_a^b K(t,s)\,\overline{y(t)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s$$
$$=\int_a^b x(s)\left[\overline{\int_a^b \overline{K(t,s)}y(t)\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}s,$$
$$\langle x,Ty\rangle=\left\langle x(t),\int_a^b K(t,s)y(s)\mathrm{d}s\right\rangle=\int_a^b x(t)\left[\overline{\int_a^b K(t,s)y(s)\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b x(s)\left[\overline{\int_a^b K(s,t)y(t)\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}s,$$

故 T 是自伴算子的充分必要条件是：$\overline{K(t,s)}=K(s,t)$.

例 6.5.3 设 H 是复 Hilbert 空间，M 是它的一个闭子空间，则由 H 到 M 的正交投影算子 P_M 是自伴算子.

证 由例 5.1.5，P_M 有界；由正交分解定理，$\forall x,y\in H$，按 M 有唯一的分解

$$x=x_0+x_1,\quad y=y_0+y_1,\quad x_0,y_0\in M,\quad x_1,y_1\perp M,$$

其中 $x_0=P_Mx$，$y_0=P_My$. 由于

$$\langle P_Mx,y\rangle=\langle x_0,y_0+y_1\rangle=\langle x_0,y_0\rangle$$
$$=\langle x_0+x_1,y_0\rangle=\langle x,P_My\rangle,$$

故 P_M 是自伴算子.

2. 自伴算子的谱结构

当 H 是有限维 Hilbert 空间时，自伴算子 A 所对应的矩阵 $\mathbf{A}$ 是 Hermite 矩

---

① 埃尔米特(1822～1901 年)，法国数学家.

阵,由线性代数理论,Hermite 矩阵的特征值都是实数. 对一般的复 Hilbert 空间 H 上的自伴算子,我们也有这一结论.

定理 6.5.2　设 H 是复 Hilbert 空间,$T\in B(H)$是自伴算子,则

$$r_\sigma(T)=\|T\|.$$

证　由

$$\|T^2\|=\|T\circ T\|\leqslant\|T\|\ \|T\|=\|T\|^2=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|^2$$

$$=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,Tx\rangle=\sup_{\|x\|=1}\langle x,T^2x\rangle$$

$$\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|x\|\ \|T^2x\|=\sup_{\|x\|=1}\|T^2x\|=\|T^2\|,$$

得$\|T^2\|=\|T\|^2$,进而有

$$\|T^{2^n}\|=\|T\|^{2^n},$$

再由谱半径公式(定理 6.1.3),有

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}=\|T\|.$$

定理 6.5.3　设 T 是复 Hilbert 空间 H 上的自伴算子,则算子 T 的所有特征值都是实数,且 T 的对应于不同特征值的特征向量正交.

证　设λ是 T 的一个特征值,$x\neq0$ 为对应的特征向量,则由定理 6.5.1,

$$\langle Tx,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle=\lambda\|x\|^2$$

为实数,故λ为实数.

设$\mu\neq\lambda$是 T 的另一特征值,$y\neq0$ 为对应的特征向量,则

$$\lambda\langle x,y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle=\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle=\langle x,\mu y\rangle=\mu\langle x,y\rangle,$$

故$\langle x,y\rangle=0$. 证毕.

定理 6.5.4　设 T 是复 Hilbert 空间 H 上的自伴算子,则 T 的谱

$$\sigma(T)\subset\mathbf{R},$$

若记

$$m=\inf_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle,\quad M=\sup_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle,$$

则$[m,M]$是包含$\sigma(T)$的最小闭区间,且 $m,M\in\sigma(T)$.

注　由定理 6.5.2 与定理 6.5.4,有

$$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}=\sup_{\|x\|=1}\{|\langle Tx,x\rangle|\}.$$

定理 6.5.5　设 T 是复 Hilbert 空间 H 上的自伴算子,则 T 没有剩余谱.

证　反证. 设$\sigma_r(T)\neq\varnothing$,任取$\lambda\in\sigma_r(T)$,由$\sigma_r(T)$的定义,$T_\lambda$ 的逆算子 T_λ^{-1} 存在,但其定义域 $T_\lambda(H)$在 H 中不稠密. 由定理 4.5.3,$T_\lambda(H)^\perp\neq\{0\}$,故$\exists y_0\in H$,$y_0\neq0$,使得对$\forall x\in H$,有

$$\langle T_\lambda x,y_0\rangle=0.$$

因为 T 是自伴算子,λ是实数,所以对$\forall x\in H$,都有

$$\langle x, T_\lambda y_0 \rangle = \langle T_\lambda x, y_0 \rangle = 0.$$

由 x 的任意性,便有 $T_\lambda y_0 = 0$. 因为 $y_0 \neq 0$,故可推得 λ 是 T 的特征值,这与假设 $\lambda \in \sigma_r(T)$ 矛盾,所以 $\sigma_r(T)$ 只能是空集. 证毕.

习 题 6.5

1. 设算子 $T: L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ 定义为

$$(Tx)(t) = tx(t),$$

证明:T 是自伴算子.

2. 设算子 $T: l^2 \to l^2$ 定义为

$$Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots), \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ 是给定的一有界实数列. 证明:T 是自伴算子,且 $\lambda_n (n=1,2,\cdots)$ 是 T 的特征值.

3. 设 H 为复 Hilbert 空间,$T \in B(H)$ 为非零的紧自伴算子,证明:T 必有非零的特征值.

习题答案

习 题 1.1

1. 由于

$$x\in A\cup(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A \text{ 或 } x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in A\cup B, x\in A\cup C$$
$$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

故 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

2. 由于

$$x\in(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c \Leftrightarrow x\notin\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha \Leftrightarrow \forall\alpha\in I, x\notin A_\alpha$$
$$\Leftrightarrow \forall\alpha\in I, x\in A_\alpha^c \Leftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,$$

故 $(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$，又由于

$$x\in(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c \Leftrightarrow x\notin\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha \Leftrightarrow \exists\alpha\in I, x\notin A_\alpha$$
$$\Leftrightarrow \exists\alpha\in I, x\in A_\alpha^c \Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c,$$

故 $(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$.

3. 由于

$$(x,y)\in(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2) \Leftrightarrow (x,y)\in A_1\times B_1, (x,y)\in A_2\times B_2$$
$$\Leftrightarrow x\in A_1\cap A_2, y\in B_1\cap B_2$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2),$$

故 $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$.

4. 必要性：$\forall x\in A, y\in B$，由 $(x,y)\in A\times B=B\times A$，知 $x\in B, y\in A$，从而有 $A=B$.

充分性：若 $A=B$ 则必有 $A\times B=B\times A$.

习 题 1.2

1. $\forall x\in\{f\geqslant a\}$，有

$$f(x)\geqslant a>a-\frac{1}{k}, \quad \forall k\in\mathbf{N},$$

故 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{f>a-\frac{1}{k}\right\}$，从而有 $\{f\geqslant a\}\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{f>a-\frac{1}{k}\right\}$；

$\forall x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{f>a-\frac{1}{k}\right\}$，则 $\forall k\in\mathbf{N}$，都有 $f(x)>a-\frac{1}{k}$，令 $k\to\infty$，就有

$$f(x)\geqslant a,$$

故 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{f>a-\frac{1}{k}\right\}\subset\{f\geqslant a\}$. 合之，得 $\{f\geqslant a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{f>a-\frac{1}{k}\right\}$.

2. 由于

$$x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ 或 } f(x) \in B$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ 或 } x \in f^{-1}(B)$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$

故有

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

3. $\forall x \in A$，由于 $f(x) \in f(A)$，故有 $x \in f^{-1}(f(A))$，从而有 $A \subset f^{-1}(f(A))$. 又对映射 $f(x)=x^2$，区间$A=[0,1]$，有

$$f(A) = [0,1], \quad f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,1]) = [-1,1] \neq [0,1],$$

故等号关系不一定成立.

4. 设 $f(x_1)=f(x_2)$，则

$$x_1 = g[f(x_1)] = g[f(x_2)] = x_2,$$

故 f 是单射；

$\forall y \in X$，令 $x=f(y)$，则

$$g(x) = g[f(y)] = y,$$

故 g 是满射.

习 题 1.3

1. 由于有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集，故 $\mathbf{R}^n$ 上的有理点集 $\mathbf{Q}^n$ 是有限个可数集的直积，从而由定理 1.3.4，$\mathbf{Q}^n$ 是可数集.

2. 设 x_0 为单调函数 $f(x)$（不妨设为单增）的间断点，则 x_0 只能为 $f(x)$ 的跳跃间断点，故每一个间断点 x_0 都对应一个开区间

$$(f(x_0-0), \quad f(x_0+0)),$$

其中 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 分别为 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限. 由于 $f(x)$ 单调，所以这样的区间互不相交，再由例 1.3.4，这些区间至多可数，故 $f(x)$ 的间断点也至多可数.

3. 因为 B 为可数集，故 $B\backslash A$ 为至多可数集. 因为 A 为无限集，故由定理 1.3.2，A 有可数子集 A_0. 由于 $A_0 \cup (B\backslash A)$ 为可数集，故存在 $A_0 \cup (B\backslash A)$ 到 A_0 的一个一一对应 T. 在 $A\backslash A_0$ 上定义 $Tx=x$，则 T 是

$$A \cup B = A \cup (B\backslash A) = ((A\backslash A_0) \cup A_0) \cup (B\backslash A) = (A\backslash A_0) \cup (A_0 \cup (B\backslash A))$$

到

$$A = (A\backslash A_0) \cup A_0$$

的一一对应，故 $A \cup B \sim A$.

4. 由于有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集，$\mathbf{Q}^c$ 为无限集，故由上题，

$$\mathbf{Q}^c \sim \mathbf{Q}^c \cup \mathbf{Q} = \mathbf{R},$$

即无理数集 $\mathbf{Q}^c$ 的基数为 c.

习 题 1.4

1. 由于 $x_n + y_n \leqslant \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$，故

$$\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\};$$

由于 $x_n+y_n\geqslant\inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}$，故

$$\inf\{x_n+y_n\}\geqslant\inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}.$$

当 $x_n=(-1)^{n-1}, y_n=(-1)^n$ 时，

$$\sup\{x_n+y_n\}=\inf\{x_n+y_n\}=0,$$

$$\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}=2,\quad \inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}=-2,$$

故等号一定不成立.

2. $\{x_n\}$有上界，故由确界存在定理，$\{x_n\}$有上确界 M. $\forall\varepsilon>0$，应$\exists N\in\mathbf{N}$，使得

$$x_N>M-\varepsilon,$$

否则$\forall n\in\mathbf{N}$，都有 $x_n\leqslant M-\varepsilon$，这与 M 是$\{x_n\}$的上确界矛盾. 此时，只要 $n>N$，注意到$\{x_n\}$是单增的，就有

$$|x_n-M|=M-x_n\leqslant M-x_N<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=M=\sup\{x_n\}$.

3. $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$)，对 $m\geqslant n$，要使

$$|a_n-a_m|\leqslant\frac{1}{10^n}<\varepsilon,$$

只需 $n>-\lg\varepsilon$. 取 $N=[-\lg\varepsilon]+1$，则当 $m,n>N$ 后，均有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$，故$\{a_n\}$是 Cauchy 列.

4. 对 $\varepsilon=1$，$\forall x_0\in[a,b]$，由 f 在 x_0 处的连续性，知$\exists\delta(x_0)>0$，只要 $|x-x_0|<\delta(x_0)$，就有

$$|f(x)-f(x_0)|<1.$$

让 x_0 跑遍$[a,b]$，则

$$\{(x_0-\delta(x_0),x_0+\delta(x_0)):x_0\in[a,b]\}$$

就是$[a,b]$的一个开覆盖，而由有限覆盖定理，它必有有限子覆盖

$$\{(x_k-\delta(x_k),x_k+\delta(x_k)),k=1,2,\cdots,n\}.$$

取

$$M=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|f(x_k)|+1,$$

则$\forall x\in[a,b]$，$\exists k$，$1\leqslant k\leqslant n$，使得 $x\in(x_k-\delta(x_k),x_k+\delta(x_k))$，从而有

$$|f(x)|\leqslant|f(x_k)|+|f(x)-f(x_k)|<|f(x_k)|+1\leqslant M,$$

故 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

习　题　1.5

1. $f'(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界，故存在 $M>0$，使得

$$|f'(x)|\leqslant M.$$

$\forall x,x'\in(-\infty,\infty)$，由 Lagrange 中值定理，有

$$|f(x)-f(x')|=|f'(\xi)||x-x'|\leqslant M|x-x'|,$$

故$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0$，只要 $|x-x'|<\delta$，就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续.

2. 令 $f(0)=1$，则 f 在$[0,2\pi]$上连续，从而由一致连续定理，f 在$[0,2\pi]$上一致连续，特别

地，f 在 $(0,2\pi)$ 上一致连续．

3. 令 $f_n=nx^{n-1}$，若 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，则其极限函数 f 应在 $[0,1]$ 上连续．但由于

$$f=\lim_{n\to\infty}f_n=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \infty, & x=1\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上不连续，故函数列 $\{nx^{n-1}\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛．

4. 由于 $1+n^2x^2\geqslant 2nx$，故有

$$\frac{x}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\frac{1}{2\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right|\leqslant\frac{1}{2n}<\varepsilon,$$

函数列 $\left\{\frac{x}{1+n^2x^2}\right\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 0. 由定理 1.5.3，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0.$$

习　题　1.6

1. 设

$$G=\bigcap_{k=1}^{n}G_k,$$

其中 $G_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为开集，则 $\forall x\in G$，有 $x\in G_k(k=1,2,\cdots,n)$．由 G_k 开，知 $\exists\delta_k>0$，使得 $(x-\delta_k,x+\delta_k)\subset G_k$，故取

$$\delta=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\delta_k\},$$

则有

$$(x-\delta,x+\delta)\subset\bigcap_{k=1}^{n}G_k=G,$$

从而有 x 为 G 的内点，故 G 为开集．

对 $\mathbf{R}$ 中的开集列 $\left\{\left(0,1+\frac{1}{n}\right)\right\}$，注意到

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(0,1+\frac{1}{k}\right)=(0,1]$$

不是 $\mathbf{R}$ 中的开集，故无限个开集的交集不一定是开集．

2. 不一定．例如常函数 0 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}=0,\quad a.e.$$

但 $D(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上点点间断，不是几乎处处连续的．

3. 设 $x_0\in\mathbf{Q}^c$，则 $D(x_0)=0$．$\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\varepsilon^{-1}]+1$，则由 N 的有限性，知 $\exists\delta>0$，使得对 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中的所有有理数 $q/p(p,q$ 互质$)$，均有 $p>N$．此时，$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，有

$$|D(x)-D(x_0)|=|D(x)|<\frac{1}{N}<\varepsilon,$$

故 $D(x)$ 在 x_0 处连续．由 x 的任意性，知 $D(x)$ 在所有无理点处均连续，从而在 $(-\infty,\infty)$ 上几

乎处处连续.

4. 因为 f 在(a,b)上可导,故有

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

由于可测函数的和、差、数乘仍是可测函数,可测函数列的极限仍是可测函数,故 f' 在(a,b)上可测.

习 题 1.7

1. 取

$$g(x)=\begin{cases}1, & f(x)\geqslant 0,\\ -1, & f(x)<0,\end{cases}$$

则 g 是 E 上的有界可测函数,故由题设,有

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E |f(x)|\mathrm{d}x=0,$$

故由唯一性定理,$f(x)=0$,a.e. 于 E.

2. 不妨设$\{f_n\}$是 E 上单增的可测函数列,令

$$g_n=f_n-f_1,$$

则$\{g_n\}$是 E 上非负递增的可测函数列,且

$$\lim g_n=\lim_{n\to\infty}f_n-f_1.$$

故由 Levi 单调收敛定理,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{n\to\infty}g_n(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E[f_n(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x=\int_E[\lim_{n\to\infty}f_n(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x,$$

再由 $f_1\in L(E)$,得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

3. 令

$$F(x)=\max\{1,f(x)\},$$

则 $F\in L([0,1])$,且

$$|f^{\frac{1}{n}}(x)|\leqslant\begin{cases}1, & f(x)\leqslant 1,\\ f(x), & f(x)>1\end{cases}=F(x),$$

由 Lebesgue 控制收敛定理及 $f>0$,a.e.,就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^{\frac{1}{n}}(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f^{\frac{1}{n}}(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 1\mathrm{d}x=1.$$

4. 由于

$$|\mathrm{e}^{-nx^2}|\leqslant 1,$$

$1\in L([0,1])$,故由 Lebesgue 控制收敛定理,得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0.$$

习 题 1.8

1. 考察函数

$$s=\frac{t}{1+t}\quad(t\geqslant 0),$$

由于

$$s'=\frac{1}{(1+t)^2}>0,$$

故 s 是 $[0,\infty)$ 上的单调增加函数. $\forall x,y\in\mathbf{C}$,由于

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|,$$

故有

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leqslant\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}=\frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|}\leqslant\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}.$$

2. 由 Hölder 不等式,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\sum_{k=1}^{n}1^2=n\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2.$$

3. $\forall f\in L^2([a,b])$,则 $f^2\in L([a,b])$. 由

$$|f|\leqslant 1+f^2,$$

知 $|f|\in L([a,b])$,从而有 $f\in L([a,b])$,故 $L^2([a,b])\subset L([a,b])$.

4. 由 Hölder 不等式,有

$$1=\left(\int_0^1 1\mathrm{d}t\right)^2=\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{x(t)}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x(t)}{2}}\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{x(t)}\mathrm{d}t\int_0^1\mathrm{e}^{-x(t)}\mathrm{d}t.$$

习 题 2.1

1. 由三角不等式,有

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,w)+d(w,y),$$

移项,得

$$d(x,y)-d(z,w)\leqslant d(x,z)+d(w,y);$$

同理

$$d(z,w)-d(x,y)\leqslant d(z,x)+d(y,w),$$

合之,得

$$|d(x,y)-d(z,w)|\leqslant d(x,z)+d(y,w).$$

2. 由定义,$d_\infty(x,y)\geqslant 0$,且

$$d_\infty(x,y)=\sup_{k\in\mathbf{N}}|x_k-y_k|=0\iff x_k=y_k,\ k\in\mathbf{N}\iff x=y,$$

故非负性成立;又 $d_\infty(x,y)=d_\infty(y,x)$,故对称性成立;$\forall x,y,z\in l^\infty$,由习题 1.4 中第 1 题,有

$$d_\infty(x,y)=\sup_{k\in\mathbf{N}}|x_k-y_k|\leqslant\sup_{k\in\mathbf{N}}(|x_k-z_k|+|z_k-y_k|)$$

$$\leqslant\sup_{k\in\mathbf{N}}|x_k-z_k|+\sup_{k\in\mathbf{N}}|z_k-y_k|=d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y),$$

故三角不等式也成立,从而有 (l^∞,d_∞) 为距离空间.

3. 由定义,$d(x,y)\geqslant 0$,且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$,故非负性成立;又 $d(x,y)=d(y,x)$,故对称

性成立；$\forall x,y,z\in X$，若 $x=y$，则

$$d(x,y)=0\leqslant d(x,z)+d(z,y),$$

而当 $x\neq y$ 时，x,y 中必有一异于 z，故有

$$d(x,y)=1\leqslant d(x,z)+d(z,y),$$

故三角不等式也成立，从而有 (X,d) 为距离空间．

4. $\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty,$$

从而有 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k|=0$，故 $\exists N\in\mathbf{N}$，使当 $k>N$ 后，有 $|x_k|\leqslant 1$. 此时，由于

$$|x_k|^q\leqslant|x_k|^p,$$

故由比较判别法，知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^q<\infty$ 从而有 $x\in l^q$，即 $l^p\subset l^q$；又取

$$M=\max\{|x_1|,\cdots,|x_N|,1\},$$

则 $\forall k\in\mathbf{N}$，有 $|x_k|\leqslant M$，故 $l^p\subset l^\infty$. 由 p 的任意性，知 $l^p\subset l^\infty$.

习　题　2.2

1. $\forall x\in(A\cap B)^\circ$，$\exists r>0$，使得

$$B_r(x)\subset A\cap B\subset A,$$

从而有 $x\in A^\circ$，类似地，$x\in B^\circ$，从而有 $x\in A^\circ\cap B^\circ$. 又 $\forall x\in A^\circ\cap B^\circ$，由 $x\in A^\circ$，知 $\exists r_1>0$，使得

$$B_{r_1}(x)\subset A;$$

由 $x\in B^\circ$，知 $\exists r_2>0$，使得

$$B_{r_2}(x)\subset B.$$

取 $r=\min\{r_1,r_2\}$，就有

$$B_r(x)\subset A\cap B,$$

即 $x\in(A\cap B)^\circ$. 综上所述，$(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$.

2. 设 $x\in A'$，则 $\forall r>0$，总有

$$B_r(x)\cap(A\backslash\{x\})\neq\varnothing,$$

从而由 $A\subset B$，得

$$B_r(x)\cap(B\backslash\{x\})\supset B_r(x)\cap(A\backslash\{x\})\neq\varnothing,$$

由此可见 $x\in B'$，$\bar{A}\subset\bar{B}$.

3. 设 A 是 X 中的任一子集，则 $\forall x\in A$，由

$$B_{1/2}(x)=\{x\}\subset A$$

知 x 是 A 的内点，故 A 是开集；由于 A^c 是 X 的一个子集，故 A^c 也是开集，从而由开集与闭集的对偶性，知

$$A=(A^c)^c$$

是闭集．

4. 由于

$$F\backslash G=F\cap G^c$$

是两个闭集的交,故是闭集;

$$G\backslash F = G \cap F^c$$

是两个开集的交,故是开集.

习 题 2.3

1. $d(x,A)$取值为实数,故是 X 上的泛函;又由定理 2.2.4,$\forall x,y\in X$,有

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y),$$

故$\forall \varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $d(x,y)<\delta$ 时,就有$|d(x,A)-d(y,A)|<\varepsilon$,故 $d(x,A)$是 X 上的一个连续泛函.

2. 令

$$f(x)=d(x,F_1)-d(x,F_2),$$

则 f 是 X 上的连续泛函.令

$$G_1=\{x:f(x)<0\}=f^{-1}[(-\infty,0)],$$

$$G_2=\{x:f(x)>0\}=f^{-1}[(0,\infty)],$$

则由定理 2.3.4,G_1,G_2 是 X 中的两个互不相交的开集. $\forall x\in F_1$,由于 F_1,F_2 是互不相交的闭集,故有 $d(x,F_2)>0$,否则由 $d(x,F_2)=0$ 可推出

$$x\in \overline{F_2}=F_2,$$

与 F_1,F_2 互不相交矛盾,故

$$f(x)=d(x,F_1)-d(x,F_2)=-d(x,F_2)<0,$$

从而有 $F_1\subset G_1$. 同理可证,$F_2\subset G_2$.

3. 因为 A,B 是 X 中的两个互不相交的闭集,故

$$d(x,A)+d(x,B)>0,$$

否则$\exists x_0\in X$,使得 $d(x_0,A)=d(x_0,B)=0$,则 x_0 分别是 A 和 B 的聚点,从而有

$$x_0\in \overline{A}\cap\overline{B}=A\cap B,$$

这与 A 和 B 互不相交矛盾. 令

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},$$

则 f 是 X 上的一个连续泛函,且当 $x\in A$ 时,$f(x)=0$;当 $x\in B$ 时,$f(x)=1$.

4. $\forall y\in f(\overline{A})$,$\exists x\in\overline{A}$,使得 $y=f(x)$. 由于 $x\in\overline{A}$,故$\exists\{x_n\}\subset A$,使得 $x_n\to x$. 由 f 的连续性,知

$$f(x_n)\to f(x)=y,$$

注意到$\{f(x_n)\}\subset f(A)$,就有 $y\in\overline{f(A)}$,所以 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

习 题 2.4

1. 必要性:设 A 为 X 中的稠集,则$\forall x\in A^c$,$\exists\{x_n\}\subset A$,使得 $x_n\to x$,故 x 的任一邻域内都有 A 中的点,x 不可能是 A^c 的内点.

充分性:设 A^c 中无内点,则$\forall x\in X$,由于 x 不是 A^c 的内点,故$\forall r>0$,总有

$$B_r(x)\cap A\neq\varnothing,$$

从而有 $x\in\overline{A}$,A 为 X 中的稠集.

2. 由 A 在 X 中稠密，知 $\overline{A}=X$. $\forall y\in f(X)$，$\exists x\in X$，使得 $y=f(x)$. 由于 $\overline{A}=X$，故 $\exists\{x_n\}\subset A$，使得 $x_n\to x$. 由 f 的连续性，知

$$f(x_n)\to f(x)=y,$$

注意到，$\{f(x_n)\}\subset f(A)$，就有 $y\in\overline{f(A)}$，故 $f(X)\subset\overline{f(A)}$，$f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密．

3. 必要性：设 X 可分，则 X 有可数稠集 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$. 若 X 为不可数集，则 $A\neq X$，故有 $x_0\in X\backslash A$，且

$$B_{0.5}(x_0)\cap A=\{x_0\}\cap A=\varnothing,$$

这与 A 在 X 中稠密矛盾，故 X 是可数集．

充分性：设 X 为可数集，则 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$，故 X 自身就是 X 的一个可数稠集，从而有 X 可分．

4. 由 X 可分，知 $\exists C=\{c_1,c_2,\cdots\}\subset X$，使得 $\overline{C}=X$. $\forall k\in\mathbf{N}$，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_{\frac{1}{k}}(c_n)\supset A,$$

否则 $\exists a\in A$，使得 $d(a,C)\geqslant\frac{1}{k}$，这与 C 在 X 中稠密矛盾. 令

$$C_k=\left\{c\in C;d(c,A)<\frac{1}{k}\right\},$$

则 C_k 为至多可数集，不妨记 $C_k=\{c_{k1},c_{k2},\cdots\}$. $\forall c_{kn}\in C_k$ $\exists a_{kn}\in A$，使得

$$d(a_{kn},c_{kn})<\frac{1}{k}.$$

令 $B=\{a_{kn};k,n=1,2,\cdots\}$，则 B 至多可数，且 $B\subset A$.

$\forall x\in A$，$\exists c_{kn_k}\in C_k$，使得 $d(c_{kn_k},x)<\frac{1}{k}$. 此时，有

$$d(a_{kn_k},x)\leqslant d(a_{kn_k},c_{kn_k})+d(c_{kn_k},x)<\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k}\to0\quad(k\to\infty),$$

故 $A\subset\overline{B}$.

习　题　2.5

1. 因为 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，使当 $m,n>N_1$ 时，有

$$d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2};$$

又 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，故 $\exists x\in X$，$N_2\in\mathbf{N}$，使当 $n_k>N_2$ 时，有

$$d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\varepsilon,$$

故 $\{x_n\}$ 也收敛到 x.

2. 设 $\{x^{(k)}\}$ 是 (l^∞,d_∞) 中的 Cauchy 列，

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots),$$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使当 $m,n>N$ 时，有

$$d_\infty(x^{(m)},x^{(n)})<\varepsilon.$$

固定 $i(i=1,2,\cdots)$，有

$$|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|\leqslant \max_{i\in\mathbf{N}}\{|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|\}=d_\infty(x^{(m)},x^{(n)})<\varepsilon,$$

故 $\{x_i^{(k)}\}$ 为 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 列，再由 $\mathbf{R}$ 的完备性，知 $\exists x_i^{(0)}\in\mathbf{R}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^{(0)}\quad(i=1,2,\cdots).$$

令

$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots),$$

则令 $m\to\infty$，有

$$|x_i^{(0)}-x_i^{(n)}|\leqslant\varepsilon,$$

由此可得

$$d_\infty(x^{(n)},x^{(0)})=\max_{i\in\mathbf{N}}|x_i^{(0)}-x_i^{(n)}|\leqslant\varepsilon,$$

从而有 $x^{(n)}\to x^{(0)}$. 最后，由于 $x^{(n)}\in l^\infty$，故 $\exists M>0$，使得 $\max\limits_{i\in\mathbf{N}}|x_i^{(n)}|\leqslant M$，从而有

$$\max_{i\in\mathbf{N}}|x_i^{(0)}|\leqslant\max_{i\in\mathbf{N}}|x_i^{(0)}-x_i^{(n)}|+\max_{i\in\mathbf{N}}|x_i^{(n)}|\leqslant\varepsilon+M,$$

$x^{(0)}\in l^\infty$，故 (l^∞,d_∞) 是完备的.

3. 设 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)},\cdots)\in c_0$，$x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\in l^\infty$，且当 $k\to\infty$ 时，有 $x^{(k)}\to x$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K\in\mathbf{N}$，使得

$$d_\infty(x^{(K)},x)=\max_{n\in\mathbf{N}}|x_n^{(K)}-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $x^{(K)}\in c_0$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(K)}=0$，故 $\exists N\in\mathbf{N}$，使当 $n>N$ 后，有 $|x_n^{(K)}|<\frac{\varepsilon}{2}$. 此时，由

$$|x_n|\leqslant|x_n-x_n^{(K)}|+|x_n^{(K)}|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

从而有 $x\in c_0$，c_0 是完备距离空间 l^∞ 中的闭集. 故由定理 2.5.2，c_0 是 l^∞ 的完备子空间.

4. 设 $x^{(n)}=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots\right)$，$x=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right)$，则有 $x^{(n)}\in M$，且

$$d(x^{(n)},x)=\sup\left\{0,\cdots,0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots\right\}=\frac{1}{n+1}\to 0.$$

由于 $x\notin M$，故 M 不完备，它的完备化空间是

$$c_0=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):\lim_{n\to\infty}x_n=0\}.$$

习 题 2.6

1. $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的稠集，但它的余集 $\mathbf{Q}^c$ 有式

$$(\overline{\mathbf{Q}^c})^\circ=\mathbf{R}^\circ=\mathbf{R}\neq\varnothing$$

成立，不满足疏集的定义，故稠集的余集不一定是疏集.

2. 设 $L^p([0,1])$ 中的非负函数的全体为 A，下证 A 是一个闭集且无内点，此时由

$$(\overline{A})^\circ=A^\circ=\varnothing,$$

即可证得 A 是 $L^p([0,1])$ 中的一个疏集.

设 $u\in A'$，则 $\exists\{u_n\}\subset A$，使得 $u_n\to u$. 由于 $u_n\geqslant 0$，故

$$u=\lim_{n\to\infty}u_n\geqslant 0,$$

从而有 $u\in A$，A 为 $L^p([a,b])$ 中的闭集；

$\forall u\in A$，令

$$u_n(t)=\begin{cases}u(t), & \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1,\\ -1, & 0\leqslant t<\frac{1}{n},\end{cases}\qquad I_E(t)=\begin{cases}1, & t\in E,\\ 0, & t\notin E,\end{cases}$$

则由

$$|u-1|^p I_{[0,1/n]}\leqslant|u-1|^p\in L([0,1])$$

及 Lebesgue 控制收敛定理，就有

$$\lim_{n\to\infty}d_p^p(u_n,u)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1|u_n(t)-u(t)|^p\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^1|u(t)-1|^p I_{[0,1/n]}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1|u(t)-1|^p\lim_{n\to\infty}I_{[0,1/n]}\mathrm{d}t=0,$$

故 $u_n\to u$，但由 $u_n\notin A$ 知 u 不可能是 A 的内点，$A^\circ=\varnothing$.

3. 由于在自然数集 $\mathbf{N}$ 中，

$$B_{0.5}(n)=\{n\}\subset\mathbf{N},$$

故 n 是 $\mathbf{N}$ 中的内点，从而有

$$\overline{\{n\}}^\circ=\{n\}^\circ=\{n\}\neq\varnothing,$$

即在 $\mathbf{N}$ 中单点集 $\{n\}$ 不是疏集，由于只有一个点，也不可能是第一纲集，从而只能是第二纲集．

4. 因为 $\mathbf{R}$ 为完备距离空间，$[a,b]$ 是 $\mathbf{R}$ 的闭子集，从而是 $\mathbf{R}$ 的完备子空间，故由 Baire 纲定理，知 $[a,b]$ 为第二纲集，从而不可能为可数集，否则由

$$[a,b]=\{x_1,x_2,\cdots\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$$

及 $[a,b]$ 中的单点集为疏集，得 $[a,b]$ 为第一纲集，矛盾．

习 题 2.7

1. 以 $n=2$ 为例加以证明．设 A 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界集，则 $\forall\{(x_n,y_n)\}\subset A$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 均为 $\mathbf{R}$ 中的有界点列．由实数集的列紧性定理，存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 及 $x\in\mathbf{R}$，使得

$$x_{n_k}\to x\quad(k\to\infty);$$

同理，对有界数列 $\{y_{n_k}\}$，存在子列 $\{y_{n_{k_j}}\}$ 及 $y\in\mathbf{R}$，使得

$$y_{n_{k_j}}\to y\quad(j\to\infty),$$

故 $\{(x_n,y_n)\}$ 有子列

$$(x_{n_{k_j}},y_{n_{k_j}})\to(x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

A 为列紧集．

2. 由 $d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}$，知 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists x_n\in A$，$y_n\in B$，使得

$$d(x_n,y_n)\leqslant d(A,B)+\frac{1}{n},$$

否则 $\exists N\in\mathbf{N}$，使对 $\forall x\in A$，$y\in B$，有

$$d(x,y) > d(A,B)+\frac{1}{N},\quad d(A,B)\geqslant d(A,B)+\frac{1}{N},$$

矛盾．由于A是紧集，故$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，使得$x_{n_k}\to x_0\in A$；再由B是紧集，知$\{y_{n_k}\}$也有收敛子列，不妨设为$\{x_{n_k}\}$本身，使得$y_{n_k}\to y_0\in B$．由于

$$d(A,B)\leqslant d(x_{n_k},y_{n_k})\leqslant d(A,B)+\frac{1}{n_k},$$

令$k\to\infty$，即得$d(A,B)=d(x_0,y_0)$．

3. 必要性：设$A\cap B=\varnothing$，若$d(A,B)=0$，则由上题，$\exists x_0\in A, y_0\in B$，使得

$$d(x_0,y_0)=d(A,B)=0,$$

从而有$x_0=y_0\in A\cap B$，这与$A\cap B=\varnothing$矛盾，故$d(A,B)>0$．

充分性：若$A\cap B\neq\varnothing$，则$\exists x_0\in A\cap B$，使得

$$d(A,B)\leqslant d(x_0,x_0)=0,$$

这与$d(A,B)>0$矛盾，故$A\cap B\neq\varnothing$．

4. 设$\{x_n\}$为X中的Cauchy列，由X紧，知X有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，再由习题2.5中第1题，知$\{x_n\}$本身也收敛，故X是完备的距离空间．

习　题　2.8

1. 在$[1,+\infty)$上有

$$|(Tx)'|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2},$$

故T是压缩映射．令$Tx=x$，得$x=\pm\sqrt{2}$，故T在$[1,+\infty)$上有唯一的不动点$x^*=\sqrt{2}$．

2. 令

$$(Tx)(t)=\frac{2}{3}\sin x(t)+\varphi(t),$$

则$\forall x,y\in C([0,1])$，由

$$d_\infty(Tx,Ty)=\max_{t\in[0,1]}|(Tx)(t)-(Ty)(t)|=\frac{2}{3}\max_{t\in[0,1]}|\sin x(t)-\sin y(t)|$$

$$\leqslant\frac{2}{3}\max_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|=\frac{2}{3}d_\infty(x,y)$$

知T为完备距离空间$C([0,1])$上的压缩映射，故由压缩映射原理，T在$C([0,1])$中有唯一的不动点，即原方程在$[0,1]$上存在唯一的连续解．

3. 令

$$g(x)=x^3+4x-2,$$

则g单增，且

$$g(0)=-2,\quad g(1)=3,$$

故方程有唯一根且根在$[0,1]$内．令

$$f(x)=\frac{2-x^3}{4},$$

由于在$[0,1]$上有

$$|f'(x)|=\left|-\frac{3}{4}x^2\right|\leqslant\frac{3}{4},$$

故 f 是 $[0,1]$ 上的压缩映射，方程的根就是 f 的不动点．

取 $x_0=0.5$，作迭代序列 $x_{n+1}=f(x_n)$，则有

$$x_1=0.4688,\quad x_2=0.4742,\quad x_3=0.4733,\quad x_4=0.4735,$$

若取近似解为 $x_4=0.4735$，其误差

$$|0.4735-x^*|\leqslant\frac{(0.75)^4}{1-0.75}|0.4735-0.5|=0.0335.$$

4. 定义映射 $T:C([a,b])\to C([a,b])$ 为

$$(Tx)(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

则 $\forall x,y\in C([a,b])$，有

$$\begin{aligned}|(Tx)(t)-(Ty)(t)|&=|\lambda|\left|\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s-\int_a^t K(t,s)y(s)\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant|\lambda|\left|\int_a^t|K(t,s)||x(s)-y(s)|\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant|\lambda|M\left|\int_a^t\max_{s\in[a,b]}|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s\right|\\&=|\lambda|M(t-a)d_\infty(x,y),\end{aligned}$$

其中 M 为 $K(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上的最大值，下面用归纳法来证明

$$|(T^nx)(t)-(T^ny)(t)|\leqslant|\lambda|^nM^n\frac{(t-a)^n}{n!}d_\infty(x,y).$$

设当 $n=k$ 时不等式成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}|(T^{k+1}x)(t)-(T^{k+1}y)(t)|&=|\lambda|\left|\int_a^t K(t,s)(T^kx)(s)\mathrm{d}s-\int_a^t K(t,s)(T^ky)(s)\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant|\lambda|M\int_a^t|(T^kx)(s)-(T^ky)(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant|\lambda|^{k+1}M^{k+1}\int_a^t\frac{(s-a)^k}{k!}\mathrm{d}s\,d_\infty(x,y)\\&=|\lambda|^{k+1}M^{k+1}\frac{(s-a)^{k+1}}{(k+1)!}d_\infty(x,y),\end{aligned}$$

故该不等式对一切自然数 n 成立．此时，由于

$$d_\infty(T^nx,T^ny)=\max_{t\in[a,b]}|(T^nx)(t)-(T^ny)(t)|\leqslant|\lambda|^nM^n\frac{(b-a)^n}{n!}d_\infty(x,y),$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda|^nM^n\dfrac{(b-a)^n}{n!}=0$，故当 n 充分大时，必有

$$|\lambda|^nM^n\frac{(b-a)^n}{n!}<1,$$

此时，T^n 为 $C([a,b])$ 上的压缩映射，故由定理 2.8.2，对任意参数 λ，方程都有唯一解 $x\in C([a,b])$．

习　题　3.1

1. 设线性空间 X 有两个零元素 θ_1,θ_2，则由零元素的性质，有

$$\theta_1=\theta_1+\theta_2=\theta_2.$$

2. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots)\in c_0$，则由

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\alpha x_n=\alpha\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

知 $x+y\in c_0,\alpha x\in c_0$，$c_0$ 对加法与数乘运算封闭．c_0 中的零元素为

$$\theta=(0,0,\cdots),$$

x 的负元素为

$$-x=(-x_1,-x_2,\cdots),$$

且 c_0 中的加法与数乘运算满足线性运算的 8 条运算规律，故 c_0 是线性空间．

3. 设 $x,y\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$，则 $\forall\alpha\in I,x,y\in M_\alpha$．由于 M_α 是 X 的线性子空间，故 $\forall a,b\in\mathbf{K}$，必有 $ax+by\in M_\alpha$，再由 α 的任意性，得

$$ax+by\in\bigcap_{\alpha\in I}M_\alpha,$$

故 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$ 对 X 上的线性运算封闭，$\bigcap\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$ 是 X 的线性子空间．

4. $\forall n\in\mathbf{N}$，令

$$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}=0,$$

得 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，故

$$\{1,x,x^2,\cdots x^{n-1}\}\subset L^p([a,b])$$

是线性无关的．再由 n 的任意性，知 $L^p([a,b])$ 是无限维的．

习 题 3.2

1. 正定性：显然，$\|f\|\geqslant0$，且

$$\|f\|=0\iff|f|^2+|f'|^2=0\iff f=f'=0\iff f=0;$$

绝对齐次性：$\forall f\in C^1([a,b]),\alpha\in\mathbf{K}$，

$$\|\alpha f\|=\left[\int_a^b(|\alpha f|^2+|\alpha f'|^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac12}=|\alpha|\left[\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac12}=|\alpha|\,\|f\|;$$

三角不等式：$\forall f,g\in C^1([a,b])$，有

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2&=\int_a^b(|f+g|^2+|f'+g'|^2)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b(|f|^2+2|f||g|+|g|^2+|f'|^2+2|f'||g'|+|g'|^2)\mathrm{d}x\\&=\|f\|^2+\|g\|^2+2\int_a^b(|f||g|+|f'||g'|)\mathrm{d}x\\&\leqslant\|f\|^2+\|g\|^2+2\int_a^b\sqrt{|f|^2+|f'|^2}\sqrt{|g|^2+|g'|^2}\mathrm{d}x\\&\leqslant\|f\|^2+\|g\|^2+2\left[\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac12}\left[\int_a^b(|g|^2+|g'|^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac12}\\&=\|f\|^2+\|g\|^2+2\|f\|\,\|g\|=(\|f\|+\|g\|)^2,\end{aligned}$$

故 $\|\cdot\|$ 是 $C^1([a,b])$ 上的范数．

2. 正定性：显然，$\|x\|\geqslant0$，且 $\|x\|=0\Leftrightarrow d(x,0)=0\Leftrightarrow x=0$；

绝对齐次性：$\forall x\in X,\alpha\in\mathbf{K}$，由相似性，得

$$\|\alpha x\|=d(\alpha x,0)=\alpha d(x,0)=|\alpha|\,\|x\|;$$

三角不等式：$\forall x,y\in X$，由平移不变性，得

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= d(x+y,0)\leqslant d(x+y,y)+d(y,0)\\ &= d(x,0)+d(y,0)=\|x\|+\|y\|,\end{aligned}$$

故$(X,\|\cdot\|)$为赋范空间.

3. 显然，d满足非负性、对称性，且$\forall x,y,z\in X$，若$x=y$，有

$$d(x,y)=0\leqslant d(x,z)+d(z,y);$$

若$x\neq y$，z与x,y之一相同(不妨设$z=x$)，则有

$$d(x,y)=1+\|x-y\|=0+1+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y);$$

若$x\neq y$，z与x,y均不相同，则有

$$\begin{aligned}d(x,y)&=1+\|x-y\|\leqslant 1+\|x-z\|+\|z-y\|\\ &<1+\|x-z\|+1+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y),\end{aligned}$$

故d是X上的一个距离，但由于$d(x,y)\neq\|x-y\|$，故d不是由范数诱导的距离.

4. 由三角不等式，有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|,$$

再由$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$的收敛性和范数的连续性，令$n\to\infty$，有

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|.$$

习　题　3.3

1. 由于$\{x_n\}$是X中的Cauchy列，故对$\varepsilon=1$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使当$m,n>N$时，有

$$\|x_m-x_n\|<1.$$

取$m=N+1$，则当$n>N$时，有

$$\|x_n\|\leqslant\|x_n-x_{N+1}\|+\|x_{N+1}\|<1+\|x_{N+1}\|,$$

取

$$M=\{\|x_1\|,\cdots,\|x_N\|,1+\|x_{N+1}\|\},$$

则$\forall n\in\mathbf{N}$，有$\|x_n\|\leqslant M$，即$\{x_n\}$有界.

2. 设$\{x_n\}$是$C([a,b])$中的Cauchy列，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使当$n,m>N$时，有

$$\|x_n-x_m\|=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

固定t，由

$$|x_n(t)-x_m(t)|\leqslant\|x_n-x_m\|<\varepsilon,$$

知$\{x_n(t)\}$是$\mathbf{R}$中的Cauchy列，故有极限$x(t)$. 在上式中令$m\to\infty$，得

$$|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon,$$

从而有

$$\|x_n-x\|=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon,$$

故$x_n\to x$. 又由于$\{x_n\}$一致收敛到x. 再由一致收敛定理，$x(t)$在$[a,b]$上一致连续，从而有$x(t)\in C([a,b])$，故$(C([a,b]),d_\infty)$是完备的.

3. 设$\{x_n\}$是$C_0(\mathbf{R})$中的 Cauchy 列,则$\forall \varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}$,使当$m,n>N$后,有

$$\|x_n-x_m\|_0=\sup_{t\in\mathbf{R}}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

此时,给定t,有

$$|x_n(t)-x_m(t)|\leqslant\sup_{t\in\mathbf{R}}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon,$$

故$\{x_n(t)\}$是$\mathbf{R}$中的一个 Cauchy 列,由$\mathbf{R}$的完备性,知$\exists x(t)$,使得

$$x_n(t)\to x(t).$$

令$m\to\infty$,有

$$|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon,$$

再由t的任意性,得

$$\|x_n-x\|_0=\sup_{t\in\mathbf{R}}|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon,$$

故$\{x_n\}$一致收敛到x. 下证$x\in C_0(\mathbf{R})$.

$\forall t\in\mathbf{R}$,$\exists a\in\mathbf{R}$,使得$t\in[-a,a]$. 由$\{x_n\}$的一致收敛性,知x在$[-a,a]$上一致连续,从而在t处连续;再由t的任意性,得$x\in C(\mathbf{R})$. 由于

$$\lim_{|t|\to\infty}x_{N+1}(t)=0,$$

故$\exists T>0$,使当$|t|>T$后,有$|x_{N+1}(t)|<\varepsilon$,此时,必有

$$|x(t)|\leqslant\sup_{|t|>T}|x(t)|\leqslant\sup_{|t|>T}|x(t)-x_{N+1}(t)|+\sup_{|t|>T}|x_{N+1}(t)|<2\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{|t|\to\infty}x(t)=0$,故$x\in C_0(\mathbf{R})$,$C_0(\mathbf{R})$具有完备性.

4. 设$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,则由$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$收敛,知$\{S_n\}$为$X$中的 Cauchy 列,从而有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|S_{n+1}-S_n\|=0,$$

即$x_n\to0(n\to\infty)$.

习 题 3.4

1. 首先,$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是$C([a,b])$上的范数;其次,由于

$$\left(\int_0^1|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\leqslant\left(\int_0^1(1+t)|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\leqslant\sqrt2\left(\int_0^1|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12},$$

即$\|u\|_1\leqslant\|u\|_2\leqslant\sqrt2\|u\|_1$,故同等价范数定理,$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价.

2. 令

$$u_1=1,\quad u_2=x,\quad\cdots,\quad u_{n+1}=x^n,$$

则$\{u_1,u_2,\cdots,u_{n+1}\}$为$P_n([a,b])$上的一个基,故$P_n([a,b])$是一个有限维赋范空间,从而由推论,知$P_n([a,b])$是 Banach 空间.

3. 令$Y=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$,则$Y$是$X$的一个有限维子空间. $\forall x\in Y$,由$x_1,x_2,\cdots x_n$线性无关,知存在唯一一组$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbf{K}^n$,使得

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n.$$

令

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|,$$

则由$\|x\|_1\geqslant0$,

$$\|x\|_1=0 \iff \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0 \iff x=0,$$

知 $\|\cdot\|_1$ 满足非负性；由

$$\|\alpha x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\alpha\lambda_k|=|\alpha|\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|=|\alpha|\,\|x\|_1$$

知 $\|\cdot\|_1$ 满足绝对齐次性；对 $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$，$y=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n$，由

$$\|x+y\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k+\beta_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|+\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|\leqslant\|x\|_1+\|y\|_1$$

知 $\|\cdot\|_1$ 满足三角不等式，故 $\|\cdot\|_1$ 是 Y 上的范数．最后，由有限维赋范空间上的范数的等价性，知 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|$ 等价，即 $\exists\,\alpha,\beta>0$，使得

$$\alpha\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\leqslant\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k\right\|\leqslant\beta\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|.$$

4. $u\in P_n([0,2])$，仿上题可以证明

$$\|u\|_1=\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k|$$

是 $P_n([0,2])$ 上的一个范数，而 $\max\limits_{x\in[0,2]}|u(x)|$ 也是 $P_n([0,2])$ 上的一个范数，故由

$$\dim P_n([0,2])=n+1$$

知其上的任意两个范数均等价，从而 $\exists\,C_n>0$，使得

$$\max_{x\in[0,2]}|u(x)|\leqslant C_n\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k|,\quad \forall u=\sum_{k=0}^{n}\alpha_kx^k.$$

习 题 4.1

1. 由内积对第一变元的线性，有

$$\langle 0,x\rangle=\langle 0+0,x\rangle=\langle 0,x\rangle+\langle 0,x\rangle=2\langle 0,x\rangle,$$

故 $\langle 0,x\rangle=0$；再由内积的共轭对称性，又有

$$\langle x,0\rangle=\overline{\langle 0,x\rangle}=0.$$

2. 由于 $\forall z\in X$，都有

$$\langle x-y,z\rangle=\langle x,z\rangle-\langle y,z\rangle=0,$$

故令 $z=x-y$，就有

$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=0,$$

从而有 $x=y$.

3. 对第一变元的线性：$\forall x,y,z\in L^2([a,b])$，$\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，有

$$\begin{aligned}\langle\alpha x+\beta y,z\rangle&=\int_a^b[\alpha x(t)+\beta y(t)]\overline{z(t)}\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b x(t)\overline{z(t)}\mathrm{d}t+\beta\int_a^b y(t)\overline{z(t)}\mathrm{d}t\\&=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle;\end{aligned}$$

共轭对称性：$\forall x,y\in L^2([a,b])$，有

$$\overline{\langle y,x\rangle}=\overline{\int_a^b y(t)\overline{x(t)}\mathrm{d}t}=\int_a^b\overline{y(t)}x(t)\mathrm{d}t=\langle x,y\rangle;$$

正定性：$\forall x\in L^2([a,b])$，有

$$\langle x,x\rangle=\int_a^b x(t)\overline{x(t)}\mathrm{d}t=\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

且 $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$, a.e.,故 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $L^2([a,b])$ 上的内积.

4. $\forall n\in\mathbf{N}$,由内积对第一变元的线性,有

$$\left\langle\sum_{k=1}^{n}x_k,x\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle x_k,x\rangle.$$

令 $n\to\infty$,由内积的连续性与 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 的收敛性,有

$$\left\langle\sum_{k=1}^{\infty}x_k,x\right\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x_k,x\rangle.$$

习 题 4.2

1. 由 Hölder 不等式,有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}x_kx_{k+1}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|x_kx_{k+1}|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_{k+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2.$$

2. 必要性:设 $x_n\to x$,则当 $n\to\infty$ 时,由

$$|\,\|x_n\|-\|x\|\,|\leqslant\|x_n-x\|\to0,$$
$$|\langle x_n,y\rangle-\langle x,y\rangle|=|\langle x_n-x,y\rangle|\leqslant\|x_n-x\|\,\|y\|\to0,$$

知 $\|x_n\|\to\|x\|$, $\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$;

充分性:设 $\|x_n\|\to\|x\|$, $\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$,则当 $n\to\infty$ 时,有

$$\|x_n-x\|^2=\langle x_n-x,x_n-x\rangle=\langle x_n,x_n\rangle-\langle x_n,x\rangle-\langle x,x_n\rangle+\langle x,x\rangle$$
$$=\|x_n\|^2-\langle x_n,x\rangle-\overline{\langle x_n,x\rangle}+\|x\|^2$$
$$\to\|x\|^2-\langle x,x\rangle-\overline{\langle x,x\rangle}+\|x\|^2=0,$$

故 $x_n\to x$.

3. 由平行四边形法则,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

故

$$\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)-\|x+y\|^2=4-4=0,$$

$x=y$.

4. $\forall c\in(a,b)$,令

$$u(t)=1,\qquad v(t)=\begin{cases}-1, & x\in[a,c),\\ 1, & x\in[c,b],\end{cases}$$

则 $u,v\in B([a,b])$,且在上确界范数 $\|u\|_0=\sup\limits_{t\in[a,b]}|u(t)|$ 下有

$$\|u+v\|_0^2+\|u-v\|_0^2=2^2+2^2=8,$$
$$2(\|u\|_p^2+\|v\|_p^2)=2(1^2+1^2)=4,$$

两者不相等,故平行四边形法则不成立,有界函数空间 $B([a,b])$ 不构成内积空间.

习 题 4.3

1. 等式 $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$ 两边平方,得

$$\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle,$$

故原式等价于

$$\alpha\langle y,x\rangle + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle = 0.$$

若 $x\perp y$,则上式显然成立;若上式成立,则取 $\alpha=\langle x,y\rangle$,即得

$$\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\alpha = 2\|\alpha\|^2 = 0,$$

从而有 $\alpha=\langle x,y\rangle=0$, $x\perp y$.

2. $\forall x\in C([-1,1])$,令

$$u=\frac{x(t)-x(-t)}{2},\quad v=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

则 $u\in M$, $v\in N$,且 $x=u+v$. 下证这种表示是唯一的.

设另有 $u'\in M$, $v'\in N$,使得 $x=u'+v'$,则由 $u+v=u'+v'$ 可得

$$u-u'=v'-v\in M\cap N=\{0\},$$

故必有 $u=u'$, $v'=v$,从而 $C([-1,1])=M\oplus N$.

$\forall u\in M, v\in N$,则 $uv\in M$,故有

$$\langle u,v\rangle = \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\mathrm{d}t = 0,$$

于是 $M=N^{\perp}$.

3. $\forall x\in B^{\perp}$, $y\in A$,则由 $A\subset B$,知 $y\in B$,从而有 $x\perp y$,故 $x\in A^{\perp}$, $B^{\perp}\subset A^{\perp}$.

4. 由 Hölder 不等式,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\langle y,e_k\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

再由 Bessel 不等式,得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

习　题　4.4

1. 由于 $\|e_1\|=\|e_2\|=\cdots=\|e_n\|=1$,且

$$\langle e_i,e_j\rangle = 0,\quad i\neq j,$$

故 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbf{K}^n$ 中的一个标准正交系. 又由于 $\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{K}^n$,有

$$x = x_1e_1+\cdots+x_ne_n,$$

故 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbf{K}^n$ 中的一个标准正交基.

2. 在实 $L^2([-\pi,\pi])$ 中,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$$

是一个标准正交基,故 $\forall f\in L^2([-\pi,\pi])$,由

$$\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_0,$$

$$\left\langle f,\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\,a_k,$$

$$\left\langle f,\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}b_k,$$

及 Parseval 等式,得

$$\|f\|^2=\left|\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\langle f,\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\langle f,\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle\right|^2$$
$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

3. $\forall x=u+\mathrm{i}v\in L^2([-\pi,\pi])$,其中 u,v 是实 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的函数,则 u,v 可按三角函数系展开为 Fourier 级数

$$u=\frac{a_0^{(1)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(1)}\cos kt+b_k^{(1)}\sin kt),$$
$$v=\frac{a_0^{(2)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(2)}\cos kt+b_k^{(2)}\sin kt),$$

从而有

$$x=u+\mathrm{i}v=\frac{a_0^{(1)}+\mathrm{i}a_0^{(2)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k^{(1)}+\mathrm{i}a_k^{(2)})\cos kt+(b_k^{(1)}+\mathrm{i}b_k^{(2)})\sin kt]$$
$$=\frac{a_0^{(1)}+\mathrm{i}a_0^{(2)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_k^{(1)}+\mathrm{i}a_k^{(2)})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}}{2}+(b_k^{(1)}+\mathrm{i}b_k^{(2)})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}}{2i}\right]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

又由于 $\forall m,n\in\mathbf{Z},m\neq n$,有

$$\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt},\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)t}\mathrm{d}t=0,$$
$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t=2\pi,$$

故 $\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\sqrt{2\pi}};n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$ 是 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的标准正交基,故由定理 4.4.2,应有

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\langle x,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\overline{\left\langle y,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle},\quad\forall y\in L^2([-\pi,\pi]).$$

取 $y=I_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1, & t\in[a,b],\\0, & t\notin[a,b],\end{cases}$ 则有

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)I_{[a,b]}(t)\mathrm{d}t=\langle x,y\rangle$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\langle x,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\overline{\left\langle y,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}c_k\overline{\left\langle y,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle}$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_n\overline{\langle I_{[a,b]}(t),\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\rangle}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\overline{\int_{-\pi}^{\pi}I_{[a,b]}(t)\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}\,\mathrm{d}t}$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\overline{\int_a^b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\int_a^b\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t.$$

4. 反证. 若 $\{e_k\}$ 不是 H 中的标准正交基,则 $\exists x\in H$,使得 $\forall k\in\mathbf{N}$,都有 $x\perp e_k$. 由于 $\{e_k\}$ 是

H 中的标准正交基,故由 Parseval 等式,得

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k-\varepsilon_k\rangle|^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x\|^2\|e_k-\varepsilon_k\|^2$$
$$=\|x\|^2\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-\varepsilon_k\|^2<\|x\|^2,$$

矛盾,故 $\{\varepsilon_k\}$ 为 H 中的标准正交基.

习　题　4.5

1. $\forall x,y\in\overline{M}$, $\exists\{x_n\},\{y_n\}\subset M$,使得 $x_n\to x,y_n\to y$; $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$,由 M 是 X 的子空间,知 $\{\alpha x_n+\beta y_n\}\subset M$,再由

$$\|\alpha x_n+\beta y_n-(\alpha x+\beta y)\|\leqslant|\alpha|\,\|x_n-x\|+|\beta|\,\|y_n-y\|,$$

知当 $n\to\infty$ 时有 $\alpha x_n+\beta y_n\to\alpha x+\beta y$,从而有 $\alpha x+\beta y\subset\overline{M}$,即 $\overline{M}$ 是 X 的子空间. 又 $\overline{M}$ 是个闭集,从而是 X 的闭子空间.

2. 设 $\forall x\in M,y\in M^{\perp}$,由于 $\langle x,y\rangle=0$,故有 $M\subset(M^{\perp})^{\perp}$,再由 $(M^{\perp})^{\perp}$ 是 H 的闭子空间,得

$$\overline{M}\subset(M^{\perp})^{\perp}.$$

$\forall x\in(M^{\perp})^{\perp}$,由于 $\overline{M}$ 是 H 的闭子空间,故由正交分解定理,$\exists a\in\overline{M}$,使得

$$x=a+(x-a),\quad x-a\in(\overline{M})^{\perp}.$$

再由 $M\subset\overline{M}$,知 $x-a\in(\overline{M})^{\perp}\subset M^{\perp}$,从而有

$$\langle x-a,x-a\rangle=\langle x,x-a\rangle=0,$$

即 $x-a=0$,

$$x=a\in\overline{M},$$

从而有 $\overline{M}\supset(M^{\perp})^{\perp}$. 合之,得 $\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$.

3. $\forall x\in(M^{\perp})^{\perp}$,由题意,$x$ 在 M 上的投影存在,故 $\exists a\in M,b\in M^{\perp}$,使得

$$x=a+b.$$

由于

$$\langle b,b\rangle=\langle a+b,b\rangle=\langle x,b\rangle=0,$$

故 $b=0$,从而有 $x=a\in M$,再由上一题的结论,有

$$\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}\subset M,$$

故 $M=\overline{M}$ 是 H 的闭子空间.

4. $\forall x\in H$,由正交分解定理,有

$$x=Px+(x-Px),$$

其中 $Px\in M,x-Px\in M^{\perp}$,从而有

$$\langle Px,x\rangle=\langle Px,Px+x-Px\rangle=\langle Px,Px\rangle=\|Px\|^2.$$

习　题　4.6

1. $[0,\pi]$ 上次数 $\leqslant 2$ 的多项式全体 $P_2([0,\pi])$ 是 $L^2([0,\pi])$ 的一个有限维子空间,$\{1,t,t^2\}$ 是它的一个基,其 Gram 矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}\pi & \pi^2/2 & \pi^3/3\\ \pi^2/2 & \pi^3/3 & \pi^4/4\\ \pi^3/3 & \pi^4/4 & \pi^5/5\end{pmatrix}.$$

由

$$\langle x,1\rangle=\int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t=2,\qquad \langle x,t\rangle=\int_0^\pi t\sin t\mathrm{d}t=\pi,$$
$$\langle x,t^2\rangle=\int_0^\pi t^2\sin t\mathrm{d}t=\pi^2-4,$$

得 $x=\sin t$ 的最佳均方逼近二次多项式

$$P(t)=(1,t,t^2)G^{-1}\begin{pmatrix}2\\ \pi\\ \pi^2-4\end{pmatrix}=(1,t,t^2)\frac{1}{\pi^5}\begin{pmatrix}9\pi^4 & -36\pi^3 & 30\pi^2\\ -36\pi^3 & 192\pi^2 & -180\pi\\ 30\pi^2 & -180\pi & 180\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ \pi\\ \pi^2-4\end{pmatrix}$$
$$=-\left(\frac{120}{\pi^3}-\frac{12}{\pi}\right)+\left(\frac{720}{\pi^4}-\frac{60}{\pi^2}\right)t-\left(\frac{720}{\pi^5}-\frac{60}{\pi^3}\right)t^2$$
$$\approx-0.0505+1.3123t-0.4177t^2.$$

2. $[-1,1]$上次数$\leqslant 2$的多项式全体 $P_2([-1,1])$是 $L^2([-1,1])$的一个有限维子空间，$\{1,t,t^2\}$是它的一个基，其 Gram 矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2/3\\ 0 & 2/3 & 0\\ 2/3 & 0 & 2/5\end{pmatrix}.$$

由

$$\langle x,1\rangle=\int_{-1}^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},\qquad \langle x,t\rangle=\int_{-1}^1\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t=0,$$
$$\langle x,t^2\rangle=\int_{-1}^1\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2-\frac{\pi}{2},$$

得 $x=\frac{1}{1+t^2}$的最佳均方逼近二次多项式

$$P(t)=(1,t,t^2)G^{-1}\begin{pmatrix}\pi/2\\ 0\\ 2-\pi/2\end{pmatrix}=(1,t,t^2)\frac{1}{8}\begin{pmatrix}9 & 0 & -15\\ 0 & 12 & 0\\ -15 & 0 & 45\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi/2\\ 0\\ 2-\pi/2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{6\pi-15}{4}-\frac{15(\pi-3)}{4}t^2\approx 0.9624-0.5310t^2.$$

3. 令

$$u_1=\begin{cases}1, & t\in(0,1/3),\\ 0, & \text{其余};\end{cases}\quad u_2=\begin{cases}1, & t\in(1/3,2/3),\\ 0, & \text{其余};\end{cases}\quad u_3=\begin{cases}1, & t\in(2/3,1),\\ 0, & \text{其余},\end{cases}$$

则$\{\sqrt{3}u_1,\sqrt{3}u_2,\sqrt{3}u_3\}$是 $L^2([0,1])$中的一个标准正交系，它所生成的空间是 $L^2([0,1])$的一个三维子空间，其 Gram 矩阵 G 为单位阵．由

$$\langle x,\sqrt{3}u_1\rangle=\int_0^{1/3}\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t=\sqrt{3}(e^{1/3}-1),$$
$$\langle x,\sqrt{3}u_2\rangle=\int_{1/3}^{2/3}\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t=\sqrt{3}(e^{2/3}-e^{1/3}),$$

$$\langle x,\sqrt{3}u_3\rangle=\int_{2/3}^{1}\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t=\sqrt{3}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{2/3}),$$

得 $x=e^t$ 的满足要求的最佳均方逼近

$$P(t)=(\sqrt{3}u_1,\sqrt{3}u_2,\sqrt{3}u_3)E^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{3}(\mathrm{e}^{1/3}-1)\\\sqrt{3}(\mathrm{e}^{2/3}-\mathrm{e}^{1/3})\\\sqrt{3}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{2/3})\end{pmatrix}$$
$$=3[(\mathrm{e}^{1/3}-1)u_1+(\mathrm{e}^{2/3}-\mathrm{e}^{1/3})u_2+(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{2/3})u_3]$$
$$\approx 1.1868u_1+1.6564u_2+2.3117u_3.$$

4. 在内积

$$\langle X,Y\rangle=E(X\overline{Y})$$

下，$L^2(\Omega)$是一个 Hilbert 空间，所求问题转化为求 Y 在 $L^2(\Omega)$的完备子空间

$$M=\mathrm{span}\{X_1,\cdots,X_n\}$$

中的最佳逼近问题．由于基$\{X_1,\cdots,X_n\}$的 Gram 矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}E(X_1\overline{X}_1)&E(X_2\overline{X}_1)&\cdots&E(X_n\overline{X}_1)\\E(X_1\overline{X}_2)&E(X_2\overline{X}_2)&\cdots&E(X_n\overline{X}_2)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\E(X_1\overline{X}_n)&E(X_2\overline{X}_n)&\cdots&E(X_n\overline{X}_n)\end{pmatrix},$$

故取

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=G^{-1}\begin{pmatrix}\langle Y,X_1\rangle\\\langle Y,X_2\rangle\\\vdots\\\langle Y,X_n\rangle\end{pmatrix}=G^{-1}\begin{pmatrix}E(Y\overline{X}_1)\\E(Y\overline{X}_2)\\\vdots\\E(Y\overline{X}_n)\end{pmatrix},$$

则 $X=\sum_{k=1}^{n}\beta_kX_k$ 就是 Y 在 $M=\mathrm{span}\{X_1,\cdots,X_n\}$中的最佳逼近．

习　题　4.7

1. 设有 $x,y\in X$，使得 $Tx=Ty$，则

$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\langle T(x-y),T(x-y)\rangle$$
$$=\|T(x-y)\|^2=\|Tx-Ty\|^2=0,$$

故 $x=y$．

2. 若 X,Y 为实内积空间，则由定理 4.2.1，$\forall x,y\in X$，有

$$\langle Tx,Ty\rangle=\frac{1}{4}(\|Tx+Ty\|^2-\|Tx-Ty\|^2)=\frac{1}{4}(\|T(x+y)\|^2-\|T(x-y)\|^2)$$
$$=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)=\langle x,y\rangle;$$

若 X,Y 为复内积空间，则由定理 4.2.2，$\forall x,y\in X$，有

$$\langle Tx,Ty\rangle=\frac{1}{4}(\|Tx+Ty\|^2-\|Tx-Ty\|^2+\mathrm{i}\|Tx+\mathrm{i}Ty\|^2-\mathrm{i}\|Tx-\mathrm{i}Ty\|^2)$$
$$=\frac{1}{4}(\|T(x+y)\|^2-\|T(x-y)\|^2+\mathrm{i}\|T(x+\mathrm{i}y)\|^2-\mathrm{i}\|T(x-\mathrm{i}y)\|^2)$$

$$=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2)=\langle x,y\rangle.$$

即 T 是保内积的．

3. 由于 $L^2([a,b])$ 是无限维的可分的 Hilbert 空间(有理系数多项式的全体是它的一个可数稠集)，故由定理 4.7.2，$L^2([a,b])$ 与 l^2 内积同构．

习 题 5.1

1. 线性性：对纯量算子 $Tx=\alpha x$，由于 $\forall x,y\in X,a,b\in\mathbb{K}$，有

$$T(ax+by)=\alpha(ax+by)=a\alpha x+b\alpha y=aTx+bTy,$$

故 T 是一个线性算子．

有界性：$\forall x\in X$，由于

$$\|Tx\|=\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|,$$

故 T 是有界线性算子．

2. $\forall x,y\in\ker(T),\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，由于

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty=0,$$

故 $\alpha x+\beta y\in\ker(T)$，$\ker(T)$ 为 X 的线性子空间；设 $\{x_n\}\subset\ker(T)$，且 $x_n\to x$，则由 T 的连续性，有

$$Tx=T(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}Tx_n=0,$$

故 $x\in\ker(T)$，$\ker(T)$ 为 X 的闭子空间．

3. 线性性：由于 $\forall x,y\in B(\mathbb{R}),\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}[T(\alpha x+\beta y)](t)&=(\alpha x+\beta y)(t-\Delta)=\alpha x(t-\Delta)+\beta y(t-\Delta)\\&=\alpha(Tx)(t)+\beta(Ty)(t)=(\alpha Tx+\beta Ty)(t),\end{aligned}$$

故 T 是一个线性算子．

有界性：$\forall x\in X$，由于

$$\|Tx\|_0=\sup_{t\in\mathbb{R}}|(Tx)(t)|=\sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t-\Delta)|=\sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t)|=\|x\|_0,$$

故在上确界范数下，时延算子 T 是一个有界线性算子．

4. 显然，f 是线性的，取值为数，且

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|x(t)|\mathrm{d}t=\|x\|_1$$

故 f 是 $C([a,b])$ 上的有界线性泛函．

习 题 5.2

1. 显然，T 是线性算子．由于

$$\begin{aligned}\|Tx\|_\infty&=\max_{t\in[0,1]}\left|t\int_0^1 x(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\left|\int_0^1 x(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^1|x(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_0^1\max_{s\in[0,1]}|x(s)|\mathrm{d}s=\max_{s\in[0,1]}|x(s)|=\|x\|_\infty,\end{aligned}$$

故 T 是有界线性算子且 $\|T\|\leqslant 1$；又 $\|1\|_\infty=1$，

$$\|T1\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}\left|t\int_0^1 1\mathrm{d}s\right|=1,$$

故 $\|T\|=1$.

2. 显然，T_n 是线性算子，且 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$，有

$$\|T_n x\|_2=\|(x_1,x_2,\cdots x_n,0,\cdots)\|_2=\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\|x\|_2,$$

故 $T_n x\in l^2$，$T_n\in B(l^2)$，且 $\|T_n\|\leqslant 1$. 又对于 $e_1=(1,0,0,\cdots)$，有

$$\|e_1\|_2=1,\ \|T_n e_1\|_2=\|(1,0,0,\cdots)\|_2=1,$$

故 $\|T_n\|=1$.

3. 线性性：$\forall x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k, y=\sum_{k=1}^{\infty}y_k e_k\in H, \alpha,\beta\in\mathbf{K}$，有

$$\begin{aligned}T(\alpha x+\beta y)&=T\Big(\alpha\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty}y_k e_k\Big)=T\Big[\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x_k+\beta y_k)e_k\Big]\\&=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x_k+\beta y_k)e_{k+1}=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_{k+1}+\beta\sum_{k=1}^{\infty}y_k e_{k+1}\\&=\alpha Tx+\beta Ty,\end{aligned}$$

故 T 是 H 上的线性算子；

有界性：$\forall x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k\in H$，由 Parseval 等式，有

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2&=\sum_{k=1}^{\infty}|(Tx,e_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\Big\langle\sum_{i=1}^{\infty}x_i e_{i+1},e_k\Big\rangle\Big|^2=\sum_{k=2}^{\infty}\Big|\Big\langle\sum_{i=1}^{\infty}x_i e_{i+1},e_k\Big\rangle\Big|^2\\&=\sum_{k=2}^{\infty}|x_{k-1}|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\|x\|^2,\end{aligned}$$

故 T 是 H 上的有界线性算子且 $\|T\|=1$.

4. $\forall x\in X$，由 S,T 的有界性，有

$$\|(S\cdot T)x\|=\|S(Tx)\|\leqslant\|S\|\,\|Tx\|\leqslant\|S\|\,\|T\|\,\|x\|,$$

故 $S\cdot T\in B(X,Z)$，且

$$\|S\cdot T\|\leqslant\|S\|\,\|T\|.$$

习　题　5.3

1. $\forall x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}, y=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2, \alpha,\beta\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}T(\alpha x+\beta y)&=T[(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2)^{\mathrm{T}}]=(\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_1+\beta y_1)^{\mathrm{T}}\\&=\alpha(x_2,x_1)^{\mathrm{T}}+\beta(y_2,y_1)^{\mathrm{T}}=\alpha Tx+\beta Ty,\end{aligned}$$

故 T 为二维赋范空间上的线性算子，从而是有界的．又

$$\|Tx\|_2=\|(x_2,x_1)^{\mathrm{T}}\|_2=\sqrt{x_2^2+x_1^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\|(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\|_2=\|x\|_2,$$

故 $\|T\|=1$.

2. 由于

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6\\6&5\end{pmatrix},$$

而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $13\pm\sqrt{153}$，故

$$\|A\|_2=\max\{\sqrt{13+\sqrt{153}},\quad \sqrt{13-\sqrt{153}}\}=\sqrt{13+\sqrt{153}}.$$

3. 令 $a=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}|a_{ij}|$，则

$$\|Ax\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\Big|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^n|a_{ij}||x_j|$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}|a_{ij}|\sum_{j=1}^n|x_j|=a\|x\|_1,$$

故 $\|A\|\leqslant a$；设当 $i=i_0,j=j_0$ 时，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}|a_{ij}|$ 取到最大值 a，记

$$x_0=(\underbrace{0,\cdots,0}_{j_0-1},1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

则 $\|x_0\|_1=1$，

$$\|Ax_0\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|a_{ij_0}|=|a_{i_0j_0}|=a,$$

故 $\|A\|=a$.

习 题 5.4

1. 设 $f(x)$ 为数域 $\mathbf{K}$ 上的 Banach 空间 X 上的非零有界线性泛函，则 $\exists x_0\in X$，使得 $f(x_0)\neq 0$. $\forall y\in\mathbf{K}$，取

$$x=\frac{y}{f(x_0)}x_0,$$

则有

$$f(x)=f\Big(\frac{y}{f(x_0)}x_0\Big)=\frac{y}{f(x_0)}f(x_0)=y,$$

故 f 是满射，由开映射定理，知 f 为开映射.

2. 由 $T\in B(X,Y)$，知 $\exists b>0$，使得

$$\|Tx\|\leqslant b\|x\|,\quad \forall x\in X;$$

又 T 是双射，故由逆算子定理，知 T^{-1} 存在且 $T^{-1}\in B(Y,X)$，故又 $\exists a>0$，使得

$$\|T^{-1}y\|\leqslant\frac{1}{a}\|y\|,\quad \forall y\in Y.$$

取 $y=Tx$，就有

$$a\|x\|\leqslant\|Tx\|.$$

3. 由于 $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty=0$，故 $\alpha x+\beta y\in\ker(T)$，$\ker(T)$ 为 X 的线性子空间；设 $\{x_n\}\subset\ker(T)$，且 $x_n\to x$，则由

$$Tx_n=0\to 0$$

及闭算子的判别定理，有 $Tx=0$，故 $x\in\ker(T)$，$\ker(T)$ 为 X 的闭子空间.

4. 设 $x_n\to x,Tx_n\to y,k,x$，则 $\forall z\in H$，由

$$\langle Tx-y,z\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle Tx-Tx_n,z\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x-x_n,Tz\rangle$$

$$=\langle\lim_{n\to\infty}(x-x_n),Tz\rangle=\langle 0,Tz\rangle=0$$

知 $Tx=y$，故 T 是闭算子，由闭图像定理，T 有界.

习 题 5.5

1. 由于 $\forall x\in X$，$\{T_nx\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列，故由习题 3.3 中第 1 题，知 $\{T_nx\}$ 是有界的，即

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|T_nx\|\}=M(x)<\infty,$$

故由一致有界原理，算子列 $\{T_n\}$ 一致有界．

2. $\forall x=(b_1,b_2\cdots)\in l^2$，令 $T_n:l^2\to l^2$ 为

$$T_nx=(a_1b_1,\cdots,a_nb_n,0,\cdots),$$

则有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_nx\|_2=\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_k^2b_k^2\Big\}^{\frac12}=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2b_k^2\Big)^{\frac12}<\infty,$$

故由一致有界原理，$\{T_n\}$ 一致有界．下面来计算 $\|T_n\|$．

因为

$$\|T_nx\|_2=\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_k^2b_k^2\Big\}^{\frac12}\leqslant\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|\Big\{\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big\}^{\frac12}\leqslant\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|\,\|x\|_2,$$

故有 $\|T_n\|\leqslant\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|$；不妨设 $|a_1|=\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|$，则取

$$x_0=(1,0,0,\cdots),$$

就有 $\|x_0\|_2=1$，

$$\|T_nx_0\|_2=\|(a_1,0,0,\cdots)\|_2=|a_1|=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|,$$

从而有 $\|T_n\|=\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|$，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|=\sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k|<\infty.$$

3. $\forall x=(b_1,b_2,\cdots)\in l^1$，令 $T_n:l^1\to l^1$ 为

$$T_nx=(a_1b_1,\cdots,a_nb_n,0,\cdots),$$

则有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_nx\|_1=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|<\infty,$$

故由一致有界原理，$\{T_n\}$ 一致有界．下面来计算 $\|T_n\|$．

因为

$$\|T_nx\|_1=\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\big(\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|\big)\sum_{k=1}^{n}|b_k|\leqslant\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|\,\|x\|_1,$$

故有 $\|T_n\|\leqslant\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|$；不妨设 $|a_1|=\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|$，则取

$$x_0=(1,0,0,\cdots),$$

就有 $\|x_0\|_1=1$，

$$\|T_nx_0\|_1=\|(a_1,0,0,\cdots)\|_1=|a_1|=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|,$$

从而有 $\|T_n\|=\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|$，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|=\sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k|<\infty.$$

4. 由于 x,y 均为 $[a,b]$ 上的可测函数，故由 $\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ 存在，知 $x(t)y(t)$ 在 $[a,b]$ 上绝对可积．令

$$y_n = \max_{t\in[a,b]}\{n, |y(t)|\},$$

则$\{y_n\}$非负递增. $\forall x\in L^p([a,b])$,令$T_n: L^p([a,b])\to\mathbf{R}$为

$$T_n x = \int_a^b |x(t)y_n(t)|\,\mathrm{d}t,$$

就有

$$\sup_{n\in N}|T_n x| = \sup_{n\in N}\int_a^b |x(t)y_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |x(t)y(t)|\,\mathrm{d}t < \infty,$$

故由一致有界原理,$\{T_n\}$一致有界. 下面来计算$\|T_n\|$.

因为

$$|T_n x| = \int_a^b |x(t)y_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\|x\|_p,$$

故有 $\|T_n\| \leqslant \left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$,取

$$x_0 = \frac{|y_n(t)|^{q-1}}{\left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}},$$

就有

$$\|x_0\|_p^p = \int_a^b |x_0(t)|^p\mathrm{d}t = \frac{\int_a^b |y_n(t)|^{(q-1)p}\mathrm{d}t}{\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t} = 1,$$

$$|T_n x_0| = \frac{1}{\left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}\int_a^b |y_n(t)|^{q-1}|y_n(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$= \left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},$$

从而有 $\|T_n\| = \left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$, 再由 Levi 单调收敛定理,

$$\sup_{n\in N}\|T_n\| = \sup_{n\in N}\left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |y_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

故 $y\in L^q([a,b])$.

习 题 5.6

1. 由于M是 Hilbert 空间H的闭子空间,故M是 Hilbert 空间. 由 Riesz 表示定理,$\exists y_0\in M$,使对$\forall x\in M$,有

$$f_0(x) = \langle x, y_0\rangle,$$

且$\|f_0\| = \|y_0\|$. 设f为f_0在H上的保范延拓,则由 Riesz 表示定理,$\exists y\in H$,使对$\forall x\in H$,有

$$f(x)=\langle x,y\rangle,$$

且 $\|f\|=|y|=\|f_0\|=\|y_0\|$. 由于 $y_0\in M$,故有 $f(y_0)=f_0(y_0)$,即

$$\langle y_0,y_0\rangle=\langle y,y_0\rangle,$$

从而有

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2&=\langle y-y_0,y-y_0\rangle=\langle y,y\rangle-\langle y,y_0\rangle-\langle y_0,y\rangle+\langle y_0,y_0\rangle\\&=\langle y,y\rangle-\langle y_0,y_0\rangle-\langle y_0,y_0\rangle+\langle y_0,y_0\rangle=\|y\|^2-\|y_0\|^2=0,\end{aligned}$$

即 $y=y_0$,故 f_0 在 H 上的保范延拓是唯一的.

2. 若 $x_0\notin\overline{M}$,则 $d=d(x_0,M)>0$,故由推论 5.6.3,存在 X 上的有界线性泛函 f,使得 $f|_M=0$,

$$f(x_0)=d>0,$$

这与题设矛盾,故 $x_0\in\overline{M}$.

3. 若 $x_0=0$,则不等式显然成立;若 $x_0\neq0$,则由推论 5.6.4,存在 X 上的有界线性泛函 f,使得

$$\|f\|=1,\quad f(x_0)=\|x_0\|,$$

故由题设,必有

$$\|x_0\|=|f(x_0)|\leqslant C.$$

4. $\forall x\in X$,若 $x=0$,则对 $\forall f\in B(X,\mathbb{K})$,有 $f(x)=0$,等式显然成立;

若 $x\neq0$,则由推论 5.6.4,$\exists f\in B(X,\mathbb{K})$,使得

$$\|f\|=1,\quad f(x)=\|x\|,$$

故 $\|x\|\leqslant\sup\limits_{\|f\|=1,f\in B(X,\mathbb{K})}|f(x)|$;又

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|,$$

故又有 $\sup\limits_{\|f\|=1,f\in B(X,\mathbb{K})}|f(x)|\leqslant\|x\|$,合之,得

$$\|x\|=\sup_{\|f\|=1,f\in B(X,\mathbb{K})}|f(x)|.$$

习 题 5.7

1. 由 $x_0\in X\setminus\ker(f)$,知 $f(x_0)\neq0$,令 $y=x-\alpha x_0$,其中

$$\alpha=\frac{f(x)}{f(x_0)},$$

则

$$f(y)=f\left(x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right)=f(x)-\frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0)=0,$$

且 $x=y+\dfrac{f(x)}{f(x_0)}x_0$. 又若 $x=y'+\alpha x_0$,其中 $y'\in\ker(f)$,则由 $f(x)=f(y')+f(\alpha x_0)=\alpha f(x_0)$ 得 $\alpha=\dfrac{f(x)}{f(x_0)}$,从而有 $y'=y$,故表示式是唯一的.

2. 记

$$e_k=(\underbrace{0,\cdots,0}_{k-1},1,0,\cdots),$$

则 $\{e_k\}$ 是 c_0 的基,$\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in c_0$,有

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k.$$

$\forall f\in(c_0)^*$，由 f 的连续性，有

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_kf(e_k)=\sum_{k=1}^{\infty}f(e_k)x_k=\sum_{k=1}^{\infty}y_kx_k,$$

其中 $y_k=f(e_k)$. 取

$$x^{(n)}=(\mathrm{sgn}y_1,\cdots,\mathrm{sgn}y_n,0,\cdots),$$

其中 $\mathrm{sgn}x$ 为 x 的符号函数，则

$$f(x^{(n)})=\sum_{k=1}^{n}|y_k|.$$

又由于

$$|f(x^{(n)})|\leqslant\|f\|\,\|x^{(n)}\|_0=\|f\|,$$

故有 $\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|\leqslant\|f\|$，令 $n\to\infty$，就有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|\leqslant\|f\|,$$

所以 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^1$ 且 $\|y\|_1\leqslant\|f\|$. 又由

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}y_kx_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|y_k||x_k|\leqslant(\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|)\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|=\|y\|_1\|x\|_0,$$

知 $\|f\|\leqslant\|y\|_1$，故 $\|f\|=\|y\|_\infty$. 定义 $T:(c_0)^*\to l^1$ 为

$$Tf=y,$$

则 T 是一个等距线性同构映射，从而有 $(c_0)^*=l^1$.

3. 由于设 $(L^2([0,\pi]))^*=L^2([0,\pi])$，并注意到 $\sin nx\in L^2([0,\pi])$，故由 Riesz 表示定理，

$$\|f\|=\|\sin nx\|_2=\left(\int_0^{\pi}\sin^2nx\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4. 设 X 为 n 维赋范空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}X$ 的一个基. $\forall x=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ke_k$，定义

$$f_i(x)=f_i\left(\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\right)=x_i,$$

则 $f_i\in X^*$，且 $\forall f\in X^*$，由

$$f(x)=f\left(\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\right)=\sum_{k=1}^{n}x_kf(e_k)=\sum_{k=1}^{n}f(e_k)f_k(x)$$

知

$$f=\sum_{k=1}^{n}f(e_k)f_k,$$

故 $\dim X^*\leqslant\dim X$，同理可得 $\dim X^{**}\leqslant\dim X^*$，从而有 $\dim X^{**}\leqslant n$. 又由于 X 与 X^{**} 的一个子空间等距线性同构映射，而 $\dim X=n$，故只能有 $X=X^{**}$，即 X 为自反空间.

习 题 5.8

1. 设 $O:X\to Y$ 为零算子，则 $\forall f\in Y^*$，$x\in X$，其对偶算子 $O^*:Y^*\to X^*$ 应满足

$$(O^* f)(x) = f(Ox) = f(0) = 0,$$

故 $O^* f=O$，即 O^* 是 $Y^* \to X^*$ 的零算子．

2．由于

$$\| Tx \|_2 = \| (0,0,x_1,x_2,\cdots) \|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \| x \|_2,$$

故 T 是有界线性算子；$\forall f \in (l^2)^* = l^2$，由 Riesz 表示定理，$\exists y=(y_1,y_2,\cdots) \in l^2$，使得

$$f(x) = \langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \quad \forall x = (x_1,x_2,\cdots) \in l^2.$$

于是

$$(T^* f)(x) = f(Tx) = \langle Tx,y \rangle = \langle (0,0,x_1,x_2,\cdots),(y_1,y_2,y_3,y_4,\cdots) \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_{k+2}} = \langle (x_1,x_2,\cdots),(y_3,y_4,\cdots) \rangle,$$

故在等距线性同构的意义下，$f=y$，$T^* f=(y_3,y_4,\cdots)$，即

$$T^* y = (y_3,y_4,\cdots), \quad \forall y = (y_1,y_2,\cdots) \in l^2.$$

3．由于

$$\| Tx \|_2 = \left\| \left(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},\cdots \right) \right\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \| x \|_2,$$

故 T 是有界线性算子；$\forall f \in (l^2)^* = l^2$，由 Riesz 表示定理，$\exists y=(y_1,y_2,\cdots) \in l^2$，使得

$$f(x) = \langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \quad \forall x = (x_1,x_2,\cdots) \in l^2.$$

于是

$$(T^* f)(x) = f(Tx) = \langle Tx,y \rangle = \left\langle \left(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},\cdots \right),(y_1,y_2,y_3,y_4,\cdots) \right\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x_k \overline{y_k} = \left\langle (x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots),\left(y_1,\frac{y_2}{2},\frac{y_3}{3},\frac{y_4}{4},\cdots \right) \right\rangle,$$

故在等距线性同构的意义下，$f=y$，

$$T^* y = \left(y_1,\frac{y_2}{2},\frac{y_3}{3},\frac{y_4}{4},\cdots \right), \quad \forall y = (y_1,y_2,\cdots) \in l^2.$$

4．当 $n=1$ 时，等式显然成立；设当 $n=k$ 时，等式

$$(T^k)^* = (T^*)^k$$

成立，则当 $n=k+1$ 时，$\forall f \in Y^*$，$x \in X$，必有

$$((T^{k+1})^* f)(x) = f(T^{k+1}x) = f[T^k(Tx)] = ((T^k)^* f)(Tx)$$
$$= (T^*[(T^k)^* f])(x) = (T^*[(T^*)^k f])(x)$$
$$= ((T^*)^{k+1} f)(x),$$

即 $(T^{k+1})^* = (T^*)^{k+1}$，从而由数学归纳法，有 $(T^n)^* = (T^*)^n$，$\forall n \in \mathbf{N}$．

习　题　5.9

1．必要性：若 $x_n \to x$，则 $x_n \xrightarrow{w} x$ 且当 $n \to \infty$ 时，

$$\big|\|x_n\|-\|x\|\big|\leqslant\|x_n-x\|\to 0,$$

故 $\|x_n\|\to\|x\|$.

充分性:令

$$f(y)=\langle y,x\rangle,$$

则 $f\in X^*$,故由 $x_n\xrightarrow{w}x$ 得

$$\langle x_n,x\rangle=f(x_n)\to f(x)=\langle x,x\rangle,$$

再由 $\|x_n\|\to\|x\|$,得

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|^2&=\langle x_n-x,x_n-x\rangle=\|x_n\|^2-\langle x_n,x\rangle-\langle x,x_n\rangle+\|x\|^2\\&\to\|x\|^2-\langle x,x\rangle-\overline{\langle x,x\rangle}+\|x\|^2=0,\end{aligned}$$

故 $x_n\to x$.

2. $\forall f\in(l^2)^*$,由 Riesz 表示定理,$\exists y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^2$,使对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$,有 $f(x)=\langle x,y\rangle$,故当 $n\to\infty$时,有

$$\begin{aligned}|f(T_nx)-f(Ox)|&=|\langle T_nx,y\rangle|=|\langle(\underbrace{0,\cdots,0}_{n},x_1,x_2,\cdots),(y_1,y_2,\cdots)\rangle|\\&=\Big|\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_{n+k}}\Big|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|y_{n+k}|^2\Big)^{\frac12}\\&=\|x\|_2\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}|y_k|^2\Big)^{\frac12}\to 0,\end{aligned}$$

从而有 $T_n\xrightarrow{w}O$. 又由于当 $x\neq 0$ 时,

$$\|T_nx-Ox\|=\|(0,\cdots,x_1,x_2,\cdots)\|=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\|x\|_2\not\to 0,$$

故$\{T_n\}$不强收敛于零算子 O.

3. 泛函列$\{f_n\}\subset X^*$弱*收敛于 f,则$\forall x\in X$,有

$$f_n(x)\to f(x)\quad(n\to\infty),$$

由于数列的极限是唯一的,故弱*极限也是唯一的.

4. 由于

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$$

是 $L^2([-\pi,\pi])$中的标准正交系,故由 Bessel 不等式,$\forall x\in L^2([-\pi,\pi])$,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\langle x,\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle\right|^2\leqslant\|x\|^2,$$

故必有 $\left\langle x,\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\,dt\to 0\ (k\to\infty)$,从而有

$$|f_n(x)-0|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt\,dt\right|\to 0,$$

即泛函列$\{f_n\}$弱*收敛于零算子 O.

习 题 6.1

1. 注意到,$R_\lambda^{-1}(T)=T-\mu I$,$R_\mu^{-1}(T)=T-\lambda I$,就有

$$
\begin{aligned}
R_\lambda(T)-R_\mu(T) &- R_\lambda(T)\cdot R_\mu^{-1}(T)\cdot R_\mu(T)-R_\lambda(T)\cdot R_\lambda^{-1}(T)\cdot R_\mu(T)\\
&=R_\lambda(T)\cdot[R_\mu^{-1}(T)-R_\lambda^{-1}(T)]\cdot R_\mu(T)\\
&=R_\lambda(T)\cdot[(T-\mu I)-(T-\lambda I)]\cdot R_\mu(T)\\
&=R_\lambda(T)\cdot(\lambda-\mu)I\cdot R_\mu(T)\\
&=(\lambda-\mu)R_\lambda(T)\cdot R_\mu(T).
\end{aligned}
$$

2. 因为

$$r_\sigma(A)=\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}},\quad r_\sigma(B)=\lim_{n\to\infty}\|B^n\|^{\frac{1}{n}},$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，数列 $\left\{\dfrac{\|A^n\|}{\left[r_\sigma(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right]^n}\right\}$ 和数列 $\left\{\dfrac{\|B^n\|}{\left[r_\sigma(B)+\frac{\varepsilon}{2}\right]^n}\right\}$ 都是有界数列，于是存在 $M(\varepsilon)>0$，使得

$$\frac{\|A^n\|}{\left[r_\sigma(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right]^n}\leqslant M(\varepsilon),\quad \frac{\|B^n\|}{\left[r_\sigma(B)+\frac{\varepsilon}{2}\right]^n}\leqslant M(\varepsilon)\quad (n=1,2,\cdots),$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\|(A+B)^n\| &=\left\|\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^k\cdot B^{n-k}\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{n}C_n^k\|A^k\|\,\|B^{n-k}\|\\
&\leqslant M^2(\varepsilon)\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[r_\sigma(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right]^k\left[r_\sigma(B)+\frac{\varepsilon}{2}\right]^{n-k}\\
&=M^2(\varepsilon)[r_\sigma(A)+r_\sigma(B)+\varepsilon]^n,
\end{aligned}
$$

故由 Gelfand 定理，有

$$r_\sigma(A+B)=\lim_{n\to\infty}\|(A+B)^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant r_\sigma(A)+r_\sigma(B)+\varepsilon,$$

再由 ε 的任意性，得

$$r_\sigma(A+B)\leqslant r_\sigma(A)+r_\sigma(B).$$

3. 由于 $A\cdot B=B\cdot A$，故有

$$\|(A\cdot B)^n\|=\|A^n\cdot B^n\|\leqslant\|A^n\|\,\|B^n\|,$$

从而由 Gelfand 定理，有

$$r_\sigma(A\cdot B)=\lim_{n\to\infty}\|(A\cdot B)^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\,\|B^n\|^{\frac{1}{n}}=r_\sigma(A)r_\sigma(B).$$

4. 由于

$$\|(S\cdot T)^n\|=\|S\cdot(T\cdot S)^{n-1}\cdot T\|\leqslant\|S\|\,\|(T\cdot S)^{n-1}\|\,\|T\|,$$

故由 Gelfand 定理，有

$$
\begin{aligned}
r_\sigma(S\cdot T) &=\lim_{n\to\infty}\|(S\cdot T)^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\|S\|^{\frac{1}{n}}\,\|(T\cdot S)^{n-1}\|^{\frac{1}{n}}\,\|T\|^{\frac{1}{n}}\\
&\leqslant\lim_{n\to\infty}\|(T\cdot S)^{n-1}\|^{\frac{1}{n}}=r_\sigma(T\cdot S),
\end{aligned}
$$

同理可证 $r_\sigma(T\cdot S)\leqslant r_\sigma(S\cdot T)$，故有 $r_\sigma(S\cdot T)=r_\sigma(T\cdot S)$.

习　题　6.2

1. $\forall\lambda\in\mathbf{C}$，有

$$(I-\lambda I)x=(1-\lambda)x.$$

当 $\lambda=1$ 时，$(I-\lambda I)x=0$ 有非零解，故 $1\in\sigma_p(I)$；当 $\lambda\neq1$，映射 $I-\lambda I$ 单且满，故 $\lambda\in\rho(I)$，合之，得

$$\sigma(I)=\sigma_p(I)=\{1\},\quad \rho(I)=\mathbf{C}\backslash\{1\}.$$

2. 令

$$(T-\lambda I)x=(x_2-\lambda x_1,x_3-\lambda x_2,\cdots)=\theta,$$

得 $x_k=\lambda^{k-1}x_1$，$x=(x_1,\lambda x_1,\lambda^2x_1\cdots)$. 取 $x_1\neq0$，由于

$$x\in l^2\ \Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{2(k-1)}|x_1|^2<\infty\ \Leftrightarrow\ |\lambda|<1,$$

故

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|<1\}.$$

由上，$r_\sigma(T)\geqslant1$；再由

$$\|Tx\|_2=\|(x_2,x_3,\cdots)\|_2=\Big(\sum_{k=2}^{\infty}|x_k|^2\Big)^{\frac12}\leqslant\|x\|_2,$$

知 $\|T\|\leqslant1$，故 $r_\sigma(T)\leqslant\|T\|\leqslant1$，合之，得 $r_\sigma(T)=1$. 由于是谱是闭集，故有

$$\sigma(T)\supset\overline{\sigma_p(T)}=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|\leqslant1\},$$

再由 $r_\sigma(T)=1$，知

$$\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|\leqslant1\},\quad \rho(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|>1\}.$$

3. 由于

$$\begin{aligned}\|T^nx\|&=\max_{t\in[0,1]}|(T^nx)(t)|=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t\mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}x(t_n)\mathrm{d}t_n\right|\\&\leqslant\max_{t\in[0,1]}\int_0^t\mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}|x(t_n)|\mathrm{d}t_n\\&=\int_0^1\mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-2}}\mathrm{d}t_{n-1}\int_0^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\ \|x\|_\infty\\&=\int_0^1\mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_{n-2}}t_{n-1}\mathrm{d}t_{n-1}\ \|x\|_\infty\\&=\int_0^1\frac{1}{(n-1)!}t_1^{n-1}\mathrm{d}t_1\ \|x\|_\infty\\&=\frac{1}{n!}\|x\|_\infty,\end{aligned}$$

故 $\|T^n\|\leqslant\frac{1}{n!}$，从而有

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac1n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

对 $\lambda=0$，有

$$T(X)\subset\{x\in C([0,1]):x(0)=0\},$$

故 $\overline{T(X)}\neq C([0,1])$，$0\in\sigma_r(T)$，所以

$$\rho(T)=\mathbf{C}\backslash\{0\},\quad \sigma(T)=\sigma_r(T)=\{0\}.$$

4. 设 M 是 H 的真子空间，否则 $P=I$，$\sigma_p(I)=\{1\}$. $\forall\lambda\in\mathbf{C}$，解方程

$$(P-\lambda I)x=Px-\lambda x=0,$$

得 $Px=\lambda x$. 注意到 $Px\in M$,故当 $\lambda\neq 0$ 时,$x\in M$,从而有 $\lambda=1$,此时,方程有非零解;当 $\lambda=0$ 时,只要 $x\in M^{\perp}$,就有 $Px=0$,原方程有非零解,故

$$\sigma_p(P)=\{0,1\}.$$

习 题 6.3

1. 必要性:由于 X 中的单位球 $B_1(0)$ 是有界集,故 $T[B_1(0)]$ 是 Y 中的列紧集.

充分性:设 A 是 X 中的有界集,则 $\exists M>0$,使得

$$\|x\|<M,\quad \forall x\in A.$$

任给 $T(A)$ 中的点列 $\{Tx_n\}$,其中 $\{x_n\}\subset A$,由于

$$\frac{1}{M}Tx_n=T\left(\frac{1}{M}x_n\right)\in T(B_1(0)),$$

故由 $T[B_1(0)]$ 的列紧性,知 $\left\{T\left(\frac{1}{M}x_n\right)\right\}$ 有收敛子列 $\left\{T\left(\frac{1}{M}x_{n_k}\right)\right\}$,相应地 $\{Tx_n\}$ 有收敛子列 $\{Tx_{n_k}\}$,故 $T(A)$ 是列紧集.

2. 设 $\{(T_1+T_2)x_n\}$ 是 $(T_1+T_2)(B_1(0))$ 中的任一点列,其中 $\{x_n\}\subset B_1(0)$,

$$(T_1+T_2)x_n=T_1x_n+T_2x_n.$$

由 $T_1\in C(X,Y)$,知 $\{T_1x_n\}$ 有收敛子列 $\{T_1x_{n_k}\}$;由 $T_2\in C(X,Y)$,知 $\{T_2x_{n_k}\}$ 有收敛子列 $\{T_2x_{n_{k_j}}\}$,从而 $\{(T_1+T_2)x_n\}$ 有收敛子列 $\{(T_1+T_2)x_{n_{k_j}}\}$,故 $(T_1+T_2)(B_1(0))$ 是列紧集,$T_1+T_2\in C(X,Y)$.

类似地,可证 αT 是紧算子.

3. 设 f 是 X 上的有界线性泛函,由于 $f(X)\subset\mathbf{K}$ 是有限维的,故 f 是有限秩算子,从而是紧算子.

4. 令 $T_n: l^2\to l^2$ 为

$$T_nx=(a_1x_1,a_2x_2,\cdots,a_nx_n,0,\cdots),\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2,$$

则 T_n 是有限秩算子,故是紧算子.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,故 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}$,使当 $n>N$ 时,有 $|a_n|<\varepsilon$. 此时,

$$\|(T_n-T)x\|_2=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_kx_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon\|x\|_2,$$

故有

$$\|T_n-T\|\leqslant\varepsilon,$$

从而有 $T_n\to T$. 由定理 6.3.4,T 是紧算子.

习 题 6.4

1. 令 $T_n: l^2\to l^2$ 定义为

$$T_nx=\left(x_2,\frac{x_3}{2},\cdots,\frac{x_{n+1}}{n},0,0,\cdots\right),$$

则 T_n 是有限秩算子,故是紧算子. 因为

$$\|(T_n-T)x\|_2=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x_{k+1}|^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x_{k+1}|^2}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{n+1}\|x\|_2,$$

所以当 $n\to\infty$ 时,有

$$\|T_n-T\|\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0,$$

即 $T_n\to T$,从而有 T 是紧算子.令

$$(T-\lambda I)x=\left(x_2-\lambda x_1,\frac{x_3}{2}-\lambda x_2,\cdots,\frac{x_{n+1}}{n}-\lambda x_n,\cdots\right)=\theta,$$

得 $x_2=\lambda x_1,x_3=2\lambda x_2,\cdots,x_{n+1}=n\lambda x_n,\cdots$,从而有

$$x_{n+1}=n!\lambda^n x_1.$$

由 $x\in l^2$,应有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=|x_1|^2\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)!]^2\lambda^{2(k-1)}<\infty,$$

故 $\lambda=0$. 当 $\lambda=0$ 时,特征方程有非零解 $x=(1,0,0,\cdots)$,故 $\lambda=0$ 是 T 唯一的特征值,即 $\sigma_p(T)=\{0\}$.

2. 令 $T_n:l^2\to l^2$ 定义为

$$T_nx=\left(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},0,0,\cdots\right),$$

则 T_n 是有限秩算子,故是紧算子. 因为

$$\|(T_n-T)x\|_2=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{n+1}\|x\|_2,$$

所以当 $n\to\infty$ 时,有

$$\|T_n-T\|\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0,$$

即 $T_n\to T$,从而有 T 是紧算子.令

$$(T-\lambda I)x=\left((1-\lambda)x_1,\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x_2,\cdots,\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)x_n,\cdots\right)=\theta,$$

知当 $\lambda=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 时方程有非零解

$$x=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},1,0,\cdots),$$

故 $\lambda=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 是 T 的特征值.

又对无限维 Banach 空间上的紧线性算子,有 $0\in\sigma(T)$,且非零的谱点只能是 T 的特征值,故

$$\sigma(T)=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}\right\}.$$

3. 令 $T_n:l^2\to l^2$ 定义为

$$T_nx=\left(0,x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},0,0,\cdots\right),$$

则 T_n 是有限秩算子,故是紧算子. 因为

$$\|(T_n-T)x\|_2=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{n+1}\|x\|_2,$$

所以当 $n\to\infty$ 时,有

$$\|T_n-T\|\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0,$$

即 $T_n\to T$，从而有 T 是紧算子．令

$$(T-\lambda I)x=\left(-\lambda x_1,x_1-\lambda x_2,\frac{x_2}{2}-\lambda x_3,\cdots\right)=\theta,$$

得 $x=\theta$，故 T 没有特征值，从而有 $\sigma(T)=\{0\}$．

对 $\lambda=0$，由

$$T(l^2)\subset\{(x_k)\in l^2:x_1=0\}$$

在 l^2 中不稠密，知其为 T 的剩余谱，从而有 $\sigma(T)=\sigma_r(T)=\{0\}$．

4. 由定理 6.3.5，知 T^* 是复 Banach 空间 X^* 上的紧线性算子，在 X^* 上对 T^* 运用定理 6.4.5 即得结论．

习　题　6.5

1. $\forall x,y\in L^2([0,1])$，因为

$$\begin{aligned}\langle Tx,y\rangle&=\int_0^1(Tx)(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t=\int_0^1tx(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1x(t)\overline{ty(t)}\mathrm{d}t=\int_0^1x(t)\overline{(Ty)(t)}\mathrm{d}t=\langle x,Ty\rangle,\end{aligned}$$

所以 T 是自伴算子．

2. $\forall x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^2$，注意到 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ 为实数列，就有

$$\begin{aligned}\langle Tx,y\rangle&=\langle(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots),(y_1,y_2,\cdots)\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kx_k\overline{y_k}=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{\lambda_ky_k}\\&=\langle(x_1,x_2,\cdots),(\lambda_1y_1,\lambda_2y_2,\cdots)\rangle=\langle Tx,y\rangle,\end{aligned}$$

故 T 是自伴算子．令

$$(T-\lambda I)x=((\lambda_1-\lambda)x_1,(\lambda_2-\lambda)x_2,\cdots,(\lambda_n-\lambda)x_n,\cdots)=\theta,$$

知当 $\lambda=\lambda_n(n=1,2,\cdots)$ 时方程有非零解

$$x=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},1,0,\cdots),$$

故 $\lambda_n(n=1,2,\cdots)$ 是 T 的特征值．

3. 由 T 是非零的自伴算子，知

$$r_\sigma(T)=\|T\|>0;$$

由 T 紧，知 T 的非零谱点都是特征值，故 T 必有非零的特征值．

参 考 文 献

[1] E. Kreyszig. 泛函分析引论及应用. 张石生等译. 重庆：重庆出版社，1985

[2] 葛显良. 应用泛函分析. 杭州：浙江大学出版社，1996

[3] 胡适耕. 应用泛函分析. 北京：科学出版社，2003

[4] 匡继昌. 实分析与泛函分析. 北京：高等教育出版社，2002

[5] 王宗尧，薛以锋，钱张军. 应用泛函分析. 上海：华东理工大学出版社，2002

[6] 吴翊，屈田兴. 应用泛函分析. 长沙：国防科技大学出版社，2002

[7] 许天周. 应用泛函分析. 北京：科学出版社，2002

[8] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义（上册）. 北京：北京大学出版社，1987

[9] 郑维行，王声望. 实变函数与泛函分析概要. 北京：人民教育出版社，1980

名词索引